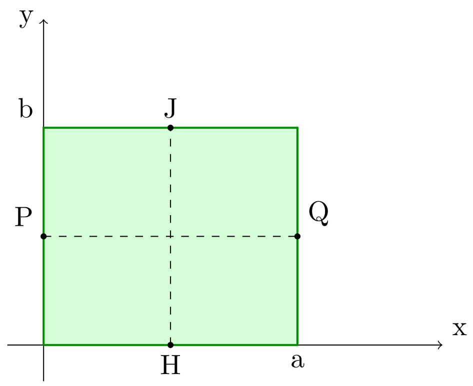
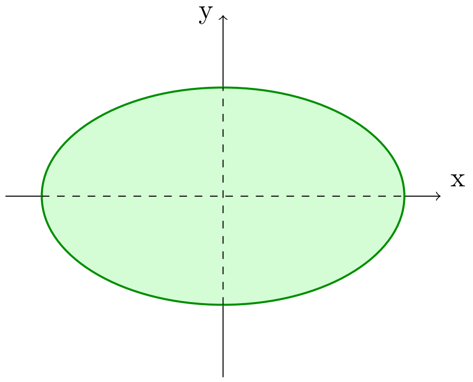


Gli assi HJ e PQ (che bisecano i lati opposti del rettangolo) sono assi di simmetria materiale. Quindi il baricentro della lamina coincide con l'intersezione dei due assi:

$$\boxed{x_G = \frac{a}{2}\,,\; y_G = \frac{b}{2}}$$

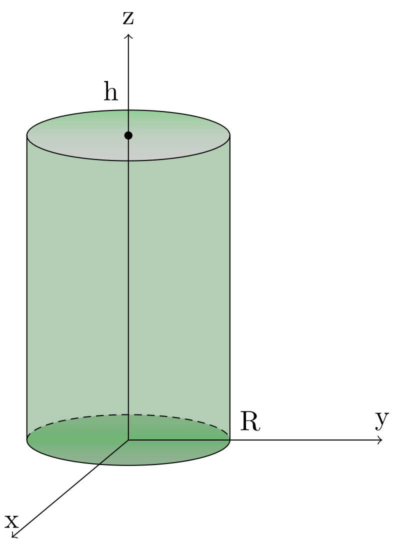
Esempio 7.18 (Baricentro di una lamina ellissoidale omogenea)**.** Consideriamo la lamina ellissoidale omogenea in figura.



Gli assi coordinati x e y sono assi di simmetria materiale. Quindi il baricentro della lamina coincide con l'origine degli assi:

$$\boxed{x_G = 0\,,\; y_G = 0}$$

Esempio 7.19 (**Cilindro circolare retto**)**.** Consideriamo il cilindro circolare retto in figura



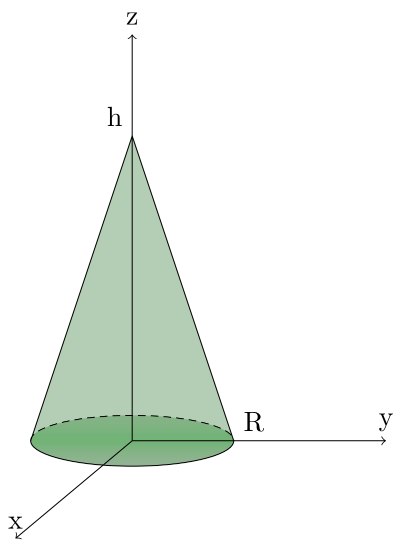
In coordinate cilindriche il cilindro è descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} 0 \leq& \theta < 2\pi \\ 0 \leq& z \leq h \\ 0 \leq& r \leq R \end{aligned}$$

Per le proprietà dei piani di simmetria materiale

$$\boxed{x_G = y_G = 0\,,\; z_G = \frac{h}{2}}$$

Esempio 7.20 (**Cono circolare retto**)**.** Consideriamo il cono circolare retto in figura



In coordinate cilindriche il cono è descritto dalle equazioni:

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \theta < 2\pi \\
0 \leq & z \leq h \\
0 \leq & r \leq R - \frac{R}{h}z
\end{aligned}
$$

Per le proprietà dei piani di simmetria materiale

$$x_G = y_G = 0$$

Mentre

$$
\begin{aligned}
z_G &= \frac{\rho}{M}\int z_G \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{\rho}{M}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{R-\frac{R}{h}z} r\mathrm{d}r \int_0^h z\mathrm{d}z \\
&= \frac{h}{4}
\end{aligned}
$$

Simmetrie di rotazione

Nel caso in cui il corpo $\mathcal{B}$ abbia densità uniforme e sia "di rotazione" sono di utilità i seguenti teoremi di Guldino.

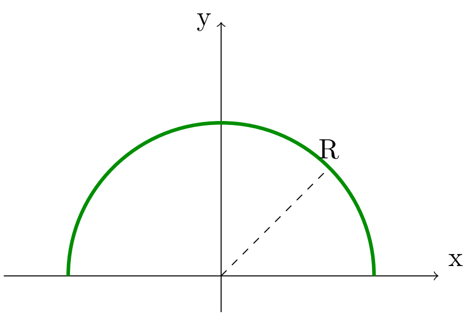
Teorema 7.21 (Primo teorema di Guldino)**.** *L'area della superficie S generata dalla rotazione di un arco di curva piana γ attorno ad un asse complanare che non la attraversi coincide col prodotto della lunghezza di γ per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di γ nel corso della rotazione.*

Dimostrazione. □

Teorema 7.22 (Secondo teorema di Guldino)**.** *Il volume del dominio D generato dalla rotazione di una regione piana bidimensionale Σ attorno ad un asse ad essa complanare e che non l'attraversi è data dal prodotto fra l'area di Σ e la lunghezza della circonferenza percorsa dal baricentro di Σ nel corso della rotazione.*

Dimostrazione. □

Esempio 7.23 (Baricentro di una semicirconferenza)**.** Consideriamo una semicirconferenza di raggio R.



Scegliamo gli assi coordinate in modo che l'asse y coincida con l'asse di simmetria materiale. Si ha

$$x_G = 0\,.$$

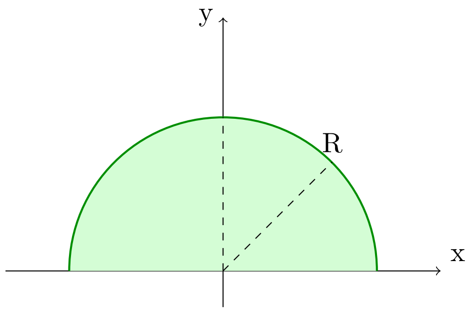
La coordindata y_G del baricentro si trova invece usando il primo teorema di Guldino:

$$
\begin{aligned}
S_{\text{sfera}} &= 2\pi \ell_{semicirc}\, y_G \\
4\pi R^2 &= 2\pi(\pi R) y_G
\end{aligned}
$$

Quindi

$$\boxed{x_G = 0\,,\; y_G = \frac{2R}{\pi}}$$

Esempio 7.24 (Baricentro del semicerchio)**.** Consideriamo un semicerchio di raggio R.



Scegliamo gli assi coordinate in modo che l'asse y coincida con l'asse di simmetria materiale. Si ha

$$x_G = 0\,.$$

La coordindata y_G del baricentro si trova invece usando il secondo teorema di Guldino:

$$\begin{aligned} V_{\text{sfera}} &= 2\pi A_{semicerchio}\, y_G \\ \frac{4}{3}\pi R^3 &= 2\pi \frac{(\pi R^2)}{2} y_G \end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{x_G = 0\,,\; y_G = \frac{4R}{3\pi}}$$

Baricentri di figure composte

La seguente proposizione fornisce una proprietà del baricentro molto utile nei calcoli.

Proposizione 7.25. *Sia $\mathcal{B}$ un sistema materiale di massa M tale che*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$$

con $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ insieme di misura nulla[(1)] *(ad esempio, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$). Allora, se G indica il baricentro di $\mathcal{B}$:*

$$(G-O) = \frac{M_1}{M_1+M_2}(G_1-O) + \frac{M_2}{M_1+M_2}(G_2-O)$$

dove M_i indica la massa del sottosistema $\mathcal{B}_i$ e G_i il rispettivo baricentro.

Dimostrazione. È immediata. □

Corollario 7.26. *Sia $\mathcal{B}$ un sistema materiale di massa M tale che:*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}_2\,.$$

Allora, se G indica il baricentro di $\mathcal{B}$:

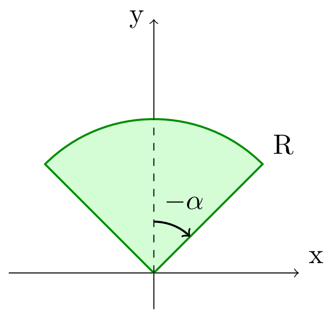
$$(G-O) = \frac{M_1}{M}(G_1-O) - \frac{M_2}{M}(G_2-O)$$

dove M_i indica la massa del sottosistema $\mathcal{B}_i$ e G_i il rispettivo baricentro.

Nel seguito vediamo il calcolo di alcuni baricentri di sistemi aventi densità di massa uniforme.

Esempio 7.27 (Baricentro di un settore circolare)**.** Consideriamo un settore circolare S_R di semiapertura α e la cui densità di massa uniforme.

---
(1) Per le applicazioni che ci interessano, questo significa: $\int_{\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2} \mathrm{d}\tau = 0$.



Scelte coordinate

Scelti gli assi coordinati in modo che l'asse y coincida coll'asse di simmetria del settore, si ha:

$$x_G = 0\,.$$

Per la coordinata y_G si ha:

$$y_G := \frac{1}{\int_{S_R} \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \int_{S_R} y_G \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta \\ y = r\cos\theta \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
\int_{S_R} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \mathrm{d}\theta \int_0^R r\,\mathrm{d}r \\
&= \alpha R^2 \\
\int_{S_R} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \mathrm{d}\theta \int_0^R r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{R^3}{3}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{R^3}{3}\sin\theta|_{-\alpha}^{\alpha} \\
&= \frac{2R^3}{3}\sin\alpha
\end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{x_G = 0\,,\; y_G = \frac{4R}{3}\frac{\sin\alpha}{2\alpha}}$$

Esempio 7.28 (Baricentro lamina semicircolare omogenea)**.** Il baricentro di una lamina semicircolare omogenea si ottiene del calcolo dell'esempio precedente ponendo

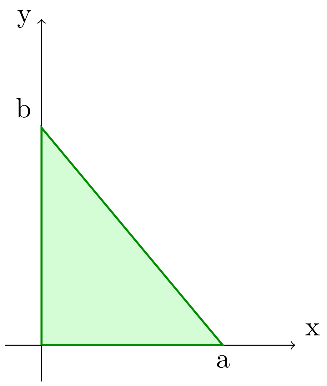
$$\alpha = \frac{\pi}{2}\,.$$

Si trova:

$$\boxed{x_G = 0\,,\; y_G = \frac{4}{3\pi}R}$$

Esempio 7.29 (Baricentro di un triangolo rettangolo)**.** Calcoliamo il baricentro di una lastra triangolare rettangolare omogenea.

Vedremo in 7.5 un metodo più rapido per calcolarlo, conoscendo il volume del cono circolare retto. Scelti gli assi coordinati in modo che coincidano con i cateti del triangolo e dette a e b le loro lunghezze si ha:

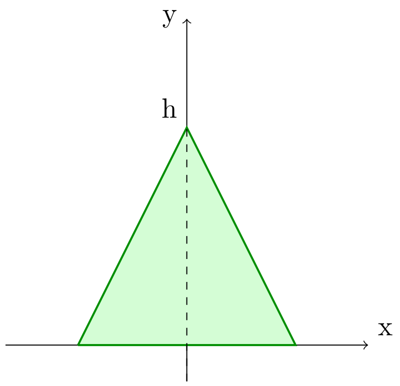


$$\begin{aligned} x_G &= \int_0^a x\,\mathrm{d}x \int_0^{b-\frac{b}{a}x} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^a \left(bx - \frac{b}{a}x^2 \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{a}{3} \\ y_G &= \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{b-\frac{b}{a}x} y\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \left(b - \frac{b}{a}x \right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{b}{3} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\boxed{x_G = \frac{a}{3}\,,\, y_G = \frac{b}{3}}$$

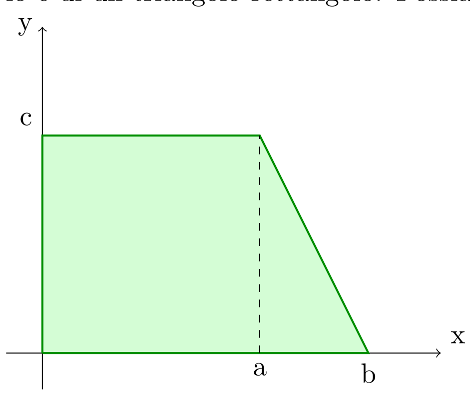
Esempio 7.30 (Baricentro di un triangolo isoscele)**.** Calcoliamo il baricentro di una lastra triangolare isoscele e omogenea.



Applicando la proposizione 7.25 e il precedente esempio, si trova subito che:

$$\boxed{x_G = 0\,,\, y_G = \frac{h}{3}}$$

Esempio 7.31 (Baricentro di un trapezio rettangolo)**.** Un trapezio è l'unione di un rettangolo e di un triangolo rettangolo. Possiamo quindi usare i risultati precedenti e la proposizione 7.25.



L'area del trapezio è:

$$A_{tot} = \frac{(b+a)c}{2}$$

e quindi, la coordinata y_G del baricentro della lamina è data da: men-

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{2}{(a+b)\,c} \left[\frac{a}{2}\,ac + \left(a + \frac{b-a}{3} \right) \frac{(b-a)c}{2} \right] \\ &= \frac{a^2+b^2+ab}{3(a+b)} \end{aligned}$$

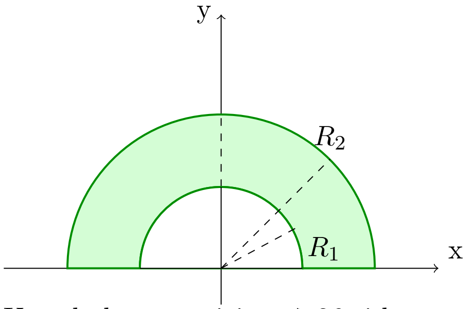
tre la coordinata y_G:

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{2}{(a+b)\,c}\left[\frac{c}{2}\,ac + \frac{c}{3}\,\frac{(b-a)c}{2}\right] \\ &= \frac{c(2a+b))}{3(a+b)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\boxed{x_G = \frac{a^2+b^2+ab}{3(a+b)}\,,\; y_G = \frac{c(2a+b))}{3(a+b)}}$$

Esempio 7.32 (Baricentro della corona circolare)**.** Consideriamo una corona semicircolare di raggi $R_1 < R_2$.



Scegliamo gli assi coordinate in modo che l'asse y coincida con l'asse di simmetria materiale. Si ha:

$$x_G = 0\,.$$

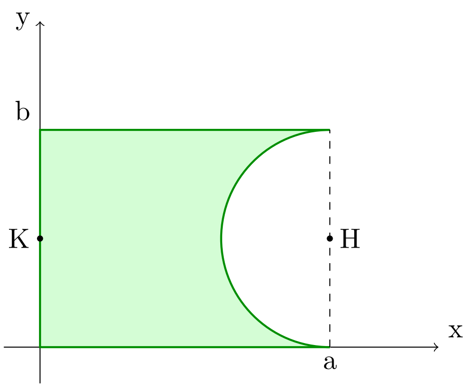
Usando la proposizione 7.26 si ha:

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{2}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\left[\frac{\pi R_2^2}{2}\frac{4R_2}{3\pi} - \frac{\pi R_1^2}{2}\frac{4R_1}{3\pi}\right] \\ &= \frac{4}{3\pi(R_2^2-R_1^2)}\left(R_2^3 - R_1^3\right) \\ &= \frac{4}{3\pi(R_2+R_1)}\left(R_2^2 + R_1^2 + R_2R_1\right) \end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{x_G = 0\,,\; y_G = \frac{4}{3\pi}\frac{R_2^2+R_1^2+R_2R_1}{R_2+R_1}}$$

Esempio 7.33 (Baricentro di un rettangolo "bucato")**.** Consideriamo la lamina omogenea in figura, costituita da una lamina rettangolare a cui è stato fatto un foro con centro in H e di raggio $\frac{b}{2}$.



La coordinata y_G del baricentro si trova immediatamente, notando che l'asse che congiunge K con H è di simmetria materiale:

$$y_G = \frac{b}{2}$$

La coordinata x_G del baricentro si trova utilizzando il corollario 7.26 e i risultati degli esempi 7.27 e 7.28 :

$$x_G = \frac{1}{ab - \frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2}\left\{\frac{a}{2}\,ab - \left[a - \frac{4}{3\pi}\frac{b}{2}\right]\frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{12a^2 - 3\pi ab + 2b^2}{3(8a - \pi b)}$$