2. 1. 6 *Si consideri un punto materiale mobile con accelerazione costante* $\mathbf{g}$ *, essendo* $\mathbf{g}$ *verticale discendente. Posto* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ *,* $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$ *,*

(a) dimostrare che il moto è piano.

Introdotto nel piano del moto un sistema di coordinate cartesiane (O,x,y) *,* y *verticale ascendente, la cui origine* O *coincide con la posizione iniziale del punto,*

(b) determinare le equazioni finite del moto;

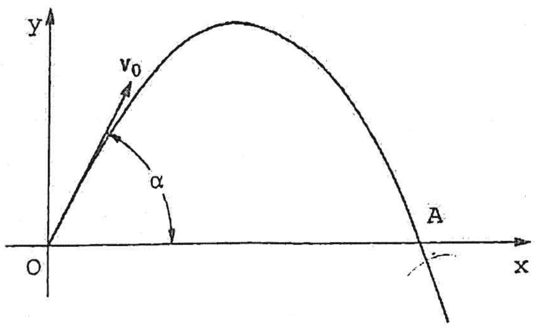
(c) calcolare la legge oraria;

(d) scrivere l'equazione della traiettoria;

(e) trovare la gittata e l'altezza (massima) raggiunta dal punto al variare dell'angolo di alzo α *(angolo tra la direzione di* $\mathbf{v}_0$ *e l'asse* x *,* $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$*), essendo fissato il modulo* v_0 *della velocità iniziale, e indicare per quali* α *tali quantità sono massime.*

Si definiscano "bersagli" i punti del piano che appartengono almeno a una traiettoria.

(f) Supposto v_0 *fissato, determinare l'equazione della curva che separa i bersagli dai rimanenti punti del piano (parabola di sicurezza).*



(a) Integrando l'equazione $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}$ si ottiene

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2 . \qquad (1)$$

Da questa relazione discende che, ad ogni istante, il vettore $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0$ è una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{g}$; ciò implica che il moto avviene nel piano individuato da $\mathbf{v}_0$ e da $\mathbf{g}$ e passante per il punto $\mathbf{x}_0$. Ovviamente se $\mathbf{v}_0$ è parallelo a $\mathbf{g}$ il moto è rettilineo.

(b) Scelti gli assi come indicato nel testo, l'equazione (1) assume la forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2 .$$

Osservato che $\mathbf{v}_0 = v_0(\cos\alpha\, \mathbf{e}_1 + \sin\alpha\, \mathbf{e}_2)$, le proiezioni sugli assi forniscono le equazioni finite del moto, ossia

$$x(t) = v_0 \cos\alpha\, t, \qquad (2)$$

$$y(t) = v_0 \sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 . \qquad (3)$$

(c) Per definizione, la legge oraria è data da

$$s(t) = \int_0^t [\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau)]^{1/2} d\tau = \int_0^t [v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - g\tau)^2]^{1/2} d\tau$$

$$= \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g} \int_0^t [1 + (\frac{g\tau}{v_0\cos\alpha} - \mathrm{tg}\alpha)^2]^{1/2} d(\frac{g\tau}{v_0\cos\alpha} - \mathrm{tg}\alpha) .$$

In questo modo ciò che resta da calcolare è l'integrale

$$I = \int\sqrt{1+\chi^2}\, d\chi .$$

Tale integrale può essere calcolato mediante la sostituzione $\mathrm{Sh}\xi = \chi$. Infatti dalle relazioni $\mathrm{Ch}\xi\, d\xi = d\chi$ e $\mathrm{Ch}^2\xi = 1 + \mathrm{Sh}^2\xi$ segue

$$I = \int \mathrm{Ch}^2\xi\, d\xi .$$

Pertanto integrando per parti si trova

$$I = \mathrm{Ch}\xi\ \mathrm{Sh}\xi - \int \mathrm{Sh}^2\xi\, d\xi = \mathrm{Ch}\xi\ \mathrm{Sh}\xi - \int(\mathrm{Ch}^2\xi - 1)d\xi = \mathrm{Ch}\xi\ \mathrm{Sh}\xi + \xi - \int\mathrm{Ch}^2\xi\, d\xi$$

da cui

$$2I = \mathrm{Ch}\xi\ \mathrm{Sh}\xi + \xi$$

ovvero, essendo $\xi = \mathrm{Sh}^{-1}\chi$,

$$\int\sqrt{1+\chi^2}\, d\chi = \tfrac{1}{2}\chi\sqrt{1+\chi^2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sh}^{-1}\chi .$$

In conclusione, l'ascissa curvilinea vale

$$s(t) = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{2g}\{(\frac{gt}{v_0\cos\alpha} - tg\alpha)[1 + (\frac{gt}{v_0\cos\alpha} - tg\alpha)^2]^{1/2} + Sh^{-1}(\frac{gt}{v_0\cos\alpha} - tg\alpha)$$

$$+ tg\alpha\ (1 + tg^2\alpha)^{1/2} + Sh^{-1}(tg\alpha)\}.$$

(d) Per determinare l'equazione della traiettoria nella forma $y = y(x)$, ricaviamo t dalla (2) e sostituiamo il risultato nella (3); si ottiene

$$y(x) = tg\,\alpha\, x - \frac{g}{2v_0^2}(1 + tg^2\alpha)x^2, \tag{4}$$

avendo usato l'identità trigonometrica $1/\cos^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$. Al variare di α l'equazione (4) rappresenta una famiglia di parabole.

(e) La gittata è la lunghezza del segmento individuato dalle intersezioni O e A della traiettoria con l'asse x (cfr. figura); la gittata dunque coincide col valore dell'ascissa x_A di A. L'ascissa x_A è la soluzione non nulla dell'equazione in x ottenuta eguagliando a zero il secondo membro della (4). Risulta

$$x_A = v_0^2\sin 2\alpha/g\,.$$

La gittata è massima per $\alpha = \pi/4$ e vale v_0^2/g.

Per ciascuna parabola della famiglia (4), l'altezza richiesta coincide con l'ordinata y_V del vertice. Si ha

$$y_V = v_0^2\sin^2\alpha/(2g)\,.$$

Da questo risultato deduciamo che l'altezza è massima per $\alpha = \pi/2$ (lancio verticale) e vale $v_0^2/(2g)$.

(f) Un punto generico del piano $B = (x_B, y_B)$ è un bersaglio se esiste una curva della famiglia (4) passante per B. Ciò accade se e solo se esiste almeno un angolo α in corrispondenza del quale si abbia

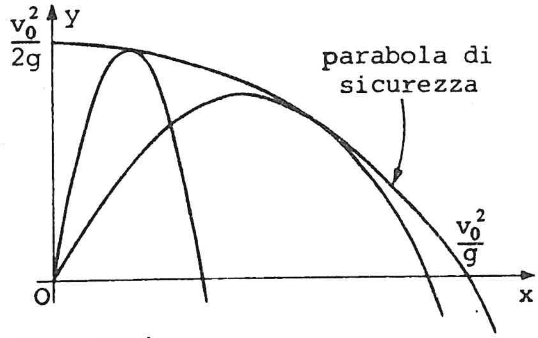
$$y_B = tg\,\alpha\, x_B - \frac{g}{2v_0^2}(1 + tg^2\alpha)x_B^2\,. \tag{5}$$

Questa relazione è un'equazione di secondo grado nell'incognita $tg\alpha$; essa ammette le soluzioni

$$tg\alpha = \frac{v_0^2}{gx_B}[1 \pm (1 - \frac{2g}{v_0^2}y_B - \frac{g^2}{v_0^4}x_B^2)^{1/2}]\,.$$

Nel caso in esame tali soluzioni sono accettabili purché $tg\alpha$ sia una quantità reale; ciò accade se e solo se le coordinate x_B, y_B soddisfano alla disequazione

$$y_B \leqslant \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x_B^2\,.$$



Se tale disequazione è soddisfatta in senso stretto, l'equazione (5) ha due soluzioni reali e distinte, per cui il punto bersaglio può essere colpito con due tiri distinti.

In conclusione, i bersagli sono tutti e soli i punti interni o appartenenti alla parabola di equazione

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

che è detta appunto parabola di sicurezza. Si noti che la parabola di sicurezza passa per i punti $(0, v_0^2/2g)$ e $(v_0^2/g, 0)$ coerentemente con i risultati ottenuti al punto (e).

Osservazione. Un altro metodo per determinare la parabola di sicurezza consiste nel controllare se la famiglia (4) ammette un inviluppo. A tale scopo si scriva la (4) nella forma

$$y = f(x,u) = ux - \frac{g}{2v_0^2}(1 + u^2)x^2, \qquad u = tg\alpha \tag{6}$$

Come è noto, l'inviluppo si ottiene ricavando u in funzione di x dalla relazione $\partial f/\partial u = 0$ e sostituendo l'espressione trovata nella (6). Ora, è immediato constatare che risulta

$$\frac{\partial f}{\partial u} = x - \frac{g}{v_0^2}\, u x^2 ;$$

pertanto si ottiene

$$u = \frac{v_0^2}{gx} ,$$

avendo supposto, come è lecito, $x \neq 0$. Si verifica subito che sostituendo questa espressione nella (6) si ottiene proprio l'equazione della parabola di sicurezza dedotta al punto (f).