Oscillatore armonico con attrito

2. 3. 22 *Un punto materiale* P, *di massa* m, *è vincolato a una retta orizzontale scabra* r *ed è soggetto all'azione di una molla, di costante elastica* k, *che lo attrae verso un punto* O *di* r. *Inizialmente* P *è in quiete a distanza* ℓ *da* O. *Denotando rispettivamente con* μ *e* f *i coefficienti di attrito statico e dinamico,*

(a) si studi il moto di P;

(b) si determini il numero di oscillazioni compiute da P *prima di rimanere in quiete.*

(a) Nel piano verticale contenente r si introduca il riferimento $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, con $\mathbf{e}_1$ versore di r ed $\mathbf{e}_2$ verticale discendente. Poiché

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{e}_1 + mg\mathbf{e}_2,$$

la legge dell'attrito statico implica la diseguaglianza

$$k|x| \leqslant \mu mg$$

secondo cui la regione di equilibrio di P è data da

$$-\mu mg/k \leqslant x \leqslant \mu mg/k. \tag{1}$$

D'altra parte il moto di P è governato dalle relazioni

$$\mathbf{F} + \mathbf{\Phi} = m\mathbf{a}$$

con

$$\mathbf{\Phi}_t = -f|\Phi_N|\mathbf{v}/v.$$

Proiettando sugli assi si perviene al sistema

$$-kx + \Phi_1 = m\ddot{x},$$
$$mg + \Phi_2 = 0,$$
$$|\Phi_1| = f|\Phi_2| = fmg,$$

da cui segue l'equazione pura di movimento

$$\ddot{x} + (k/m)x = \pm fg, \tag{2}$$

dove la scelta del segno al secondo membro va effettuata in modo che tale contributo sia opposto al moto.

Premesso ciò e tenuto conto delle condizioni iniziali $x(0) = \ell$, $\dot{x}(0) = 0$, esaminiamo il moto di P. In accordo con la (1), se $\ell \leqslant \mu mg/k$ il punto P resta in quiete. Sia allora $\ell > \mu mg/k$. Per la legge del moto incipiente P si muove nel verso delle x decrescenti e quindi nella (2) va scelto il segno positivo; il problema da risolvere è dunque

$$\ddot{x} + (k/m)x = fg, \qquad x(0) = \ell, \quad \dot{x}(0) = 0. \tag{3}$$

La soluzione del problema (3) è immediata e vale

$$x(t) = \left(\ell - \frac{fmg}{k}\right)\cos(\sqrt{k/m}\, t) + \frac{fmg}{k} \tag{4}$$

Questa è la legge del moto valida tra l'istante iniziale e l'istante $t_1 = \pi\sqrt{m/k}$ in cui P subisce un arresto nella posizione di ascissa $x_1 = 2fmg/k - \ell$. Bisogna ora decidere se x_1 soddisfa o no la (1). Si hanno due casi.

Sia $x_1 \geqslant 0$: in tal caso la (1) risulta soddisfatta. Infatti, poiché $x_1 \geqslant 0$ la prima diseguaglianza è banalmente soddisfatta. Per ciò che riguarda la seconda, la condizione che per $t = 0$ il punto P si muova, ossia $\ell > \mu mg/k$, implica

$$x_1 = 2fmg/k - \ell < 2fmg/k - \mu mg/k$$

e allora, essendo $f < \mu$, si ha

$$x_1 < 2\mu mg/k - \mu mg/k = \mu mg/k;$$

Pertanto la (1) è soddisfatta. Questo risultato può apparire naturale se si osserva che, a causa dell'attrito dinamico, il punto P non ha potuto sorpassare O; di conseguenza la presenza dell'attrito statico, con un coefficiente $\mu > f$, non permette a P di ripartire.

Sia $x_1 < 0$: in questo caso la (1) può essere soddisfatta oppure no. Supponiamo che risulti $x_1 < -\mu mg/k$. Siccome P si muove nel verso delle x crescenti il problema da risolvere è

$$\ddot{x} + (k/m)x = -fg, \qquad x(t_1) = x_1, \quad \dot{x}(t_1) = 0 \tag{5}$$

la cui soluzione è

$$x(t) = \left(\frac{3fmg}{k} - \ell\right)\cos[\sqrt{k/m}\,(t - t_1)] - \frac{fmg}{k}. \tag{6}$$

Questa legge del moto è valida tra l'istante t_1 e l'istante $t_2 = 2\pi\sqrt{m/k}$ in cui P si arresta nella posizione di ascissa $x_2 = -4fmg/k + \ell$. Anche in questo caso bisogna stabilire se x_2 soddisfa la (1). Analogamente al caso precedente, se $x_2 \leqslant 0$ la (1) è soddisfatta. Nell'ipotesi $x_2 > 0$ e $x_2 > \mu mg/k$ il punto si muove. L'analisi del moto procede in maniera analoga; il punto P si arresta allorché vale la (1).

(b) Iterando il procedimento di cui sopra si deduce che P subisce un arresto nelle posizioni

$$x_n = (-1)^n (\ell - 2nfmg/k) \qquad (7)$$

raggiunte negli istanti

$$t_n = n\pi\sqrt{m/k}. \qquad (8)$$

Il punto P permarrà in quiete allorché x_n soddisfa alla (1) ossia

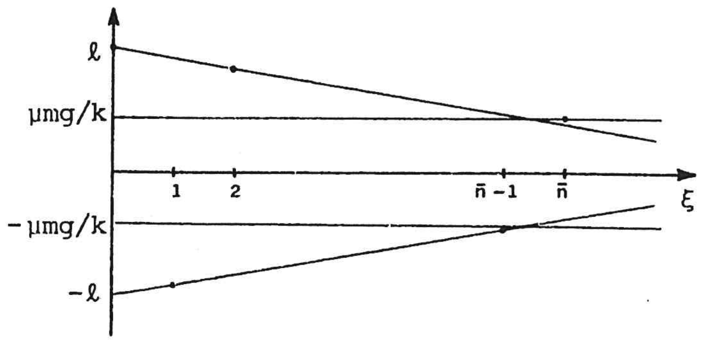
$$|(-1)^n (\ell - 2nfmg/k)| \leqslant \mu mg.$$

Tale diseguaglianza vale per il primo intero $\bar{n}$ per cui

$$\bar{n} \geqslant (k\ell - \mu mg)/(2fmg);$$

in altra forma, usando il simbolo [ ] per indicare la parte intera, risulta

$$\bar{n} = [(k\ell - \mu mg)/(2fmg) + 1].$$



La domanda è anche suscettibile di una risposta grafica. Infatti, dalla (8) si ricava che le posizioni x_n si distribuiscono sulle due rette

$$x(\xi) = \pm(\ell - 2\xi fmg/k).$$

Intersecando tali rette con $x = \pm\mu mg/k$ (posizioni di equilibrio limite) è possibile dedurre il valore di $\bar{n}$ (vedi figura).