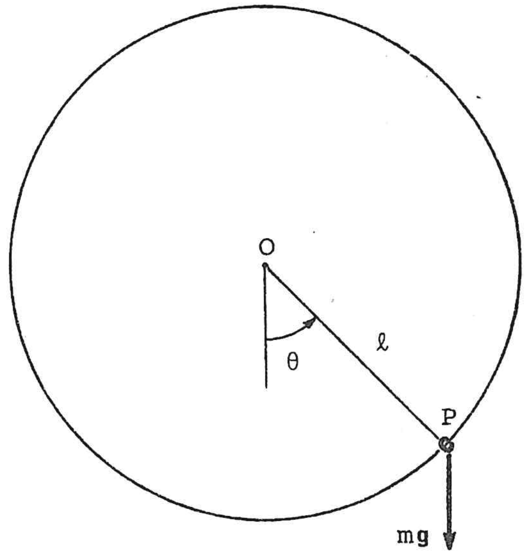
2. 3. 4 *Un punto materiale* P *di massa* m *è vincolato a una circonferenza di centro* O *e raggio* ℓ *posta in un piano verticale. Denotato con* θ *l'angolo che il segmento* OP *forma con la verticale e supposto di far partire* P *dalla posizione in cui* $\theta = \theta_0$ *con velocità di modulo* v_0,

(a) determinare l'intervallo di variabilità di θ;

(b) mostrare che il problema è riconducibile alle quadrature (pendolo semplice);

(c) determinare il moto di* P.



(a) Il moto del punto ammette l'integrale primo dell'energia nella forma

$$\tfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta = E, \qquad (1)$$

dove $E = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell\cos\theta_0$ è l'energia totale del punto. Esplicitando $\dot{\theta}^2$ dalla (1) si ottiene

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta + \frac{E}{mg\ell}\right) \qquad (2)$$

da cui, dovendo essere $\dot{\theta}^2$ non negativo, segue che

$$\cos\theta \geqslant -\frac{E}{mg\ell}. \qquad (3)$$

Se $E = E_{min} = -mg\ell$ allora la (3) è soddisfatta se e solo se $\theta = 0$, il che corrisponde all'equilibrio (stabile) in $\theta = 0$.

Nell'ipotesi $\left|\frac{E}{mg\ell}\right| < 1$ si ponga

$$\theta_1 = \arccos\left(-\frac{E}{mg\ell}\right), \qquad \theta_1 \in (0,\pi).$$

La relazione (3) fornisce l'intervallo di variabilità

$$-\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_1.$$

Se invece $\frac{E}{mg\ell} \geqslant 1$ allora non si hanno restrizioni su θ.

(b) Si ponga $e = \frac{E}{mg\ell}$; dalla (2) si ha

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{2g/\ell}\,\sqrt{\cos\theta + e}, \qquad (4)$$

ove si adotta il segno positivo (negativo) se il moto avviene nel senso degli archi crescenti (decrescenti). La (4) può essere integrata per separazione delle variabili ottenendo così la relazione

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\xi}{\sqrt{\cos\xi + e}} = \pm\sqrt{2g/\ell}\; t$$

che può essere più convenientemente riscritta nella forma

$$\int_0^{\theta} \frac{d\xi}{\sqrt{\cos\xi + e}} = \sqrt{2g/\ell}\;(t_0 \pm t), \qquad (5)$$

avendo posto

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\cos\xi + e}} = \sqrt{2g/\ell}\; t_0.$$

In questo modo t_0 rappresenta l'istante (più prossimo a $t = 0$) per il quale risulta $\theta = 0$. L'integrale al primo membro della (5) è, in generale, un integrale ellittico incompleto di prima specie. Infatti usando l'identità trigonometrica

$$\cos\xi = 1 - 2\sin^2(\xi/2)$$

e ponendo $\phi = \xi/2$, la (5) diventa

$$\int_0^{\theta/2} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{1}{2}(1+e) - \sin^2\phi}} = \sqrt{g/\ell}\;(t_0 \pm t); \qquad (6)$$

il problema è quindi ricondotto alle quadrature.

(c) Per esaminare le conseguenze della (6) è opportuno considerare separatamente i tre casi $e \gtreqless 1$.

(i) $e < 1$. Sia $k^2 = \frac{1}{2}(1+e)$, $k^2 < 1$. Posto $u(\phi) = \dfrac{\sin\phi}{k}$, la (6) diventa

$$\int_0^{u(\theta/2)} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{1-k^2u^2}} = \sqrt{g/\ell}\,(t_0 \pm t).$$

Invertendo l'integrale al primo membro si ottiene, come è noto, la funzione ellittica di Jacobi sn di modulo $(1+e)/2$. Risulta allora

$$\sin(\theta/2) = k\,\mathrm{sn}[\sqrt{g/\ell}\,(t_0 \pm t)],$$

da cui segue la funzione $\theta = \theta(t)$.

(ii) $e = 1$. La (6) diventa

$$\int_0^{\theta/2} \frac{d\phi}{\cos\phi} = \sqrt{g/\ell}\,(t_0 \pm t)$$

da cui

$$\ln\left[\frac{1+\sin(\theta/2)}{1-\sin(\theta/2)}\right] = 2\sqrt{g/\ell}\,(t_0 \pm t).$$

Ricavando $\sin(\theta/2)$ e quindi θ si trova la relazione

$$\theta = 2\arcsin\{\mathrm{Th}[\sqrt{g/\ell}\,(t_0 \pm t)]\},$$

la quale mostra che $\theta \to \pm\pi$ per $t \to \infty$. Ciò significa che il punto raggiunge la posizione più alta della circonferenza in un tempo infinito; in tal caso si ha un moto a meta asintotica.

(iii) $e > 1$. Sia $k^2 = 2/(1+e)$, $k^2 < 1$. Posto $u(\phi) = \sin\phi$, la (6) fornisce la relazione

$$\int_0^{u(\theta/2)} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{1-k^2u^2}} = \sqrt{g/\ell}\,(t_0 \pm t)/k$$

che, mediante l'uso della funzione sn di modulo $2/(1+e)$, dà

$$\sin(\theta/2) = \mathrm{sn}[\sqrt{g/\ell}\,(t_0 \pm t)/k]$$

e quindi la funzione $\theta = \theta(t)$.