

Infatti

$$\begin{aligned}
 {}^{\mathcal{B}}I_O(\vec{u}) &= \int_{\mathcal{B}} \rho(P) (P - O) \wedge [\vec{u} \wedge (P - O)] d\tau(P) \\
 &= \int_{\mathcal{B}_1} \rho(P) (P - O) \wedge [\vec{u} \wedge (P - O)] d\tau(P) \\
 &\quad + \int_{\mathcal{B}_2} \rho(P) (P - O) \wedge [\vec{u} \wedge (P - O)] d\tau(P) \\
 &= {}^{\mathcal{B}_1}I_O + {}^{\mathcal{B}_2}I_O
 \end{aligned}$$

Analoga proprietà vale per i momenti di inerzia.

## 8.4 Calcolo di tensori di inerzia

### Sistemi piani

**Esempio 8.25 (Manubrio).** Consideriamo un corpo rigido lineare di lunghezza  $\ell$  e un sistema di assi in cui  $\vec{e}_1$  è diretto come il corpo e in cui l'origine degli assi è situata nel punto medio del segmento.

Chiaramente si ha:

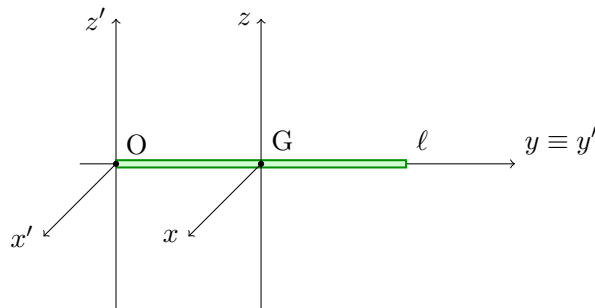
$$(I_G)_{11} = (I_G)_{33}$$

e quindi, per l'Eq. (8.8),

$$(I_G)_{22} = 0$$

Rimane quindi da calcolare:

$$\begin{aligned}
 (I_G)_{11} &= \rho \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} y^2 dy \\
 &= \frac{\rho \ell^3}{3 \cdot 4} \\
 &= \frac{m\ell^2}{12}
 \end{aligned}$$



Quindi

$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{m\ell^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12} \end{pmatrix}$$

Questo è l'unico sistema per cui un momento principale è nullo. Utilizzando l'Eq.(8.9), poichè

$$(G - O) = \left(0, \frac{\ell}{2}, 0\right)$$

si trova:

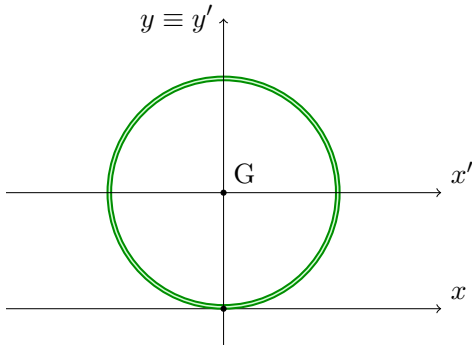
$$I_O = I_G + m \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell^2}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m\frac{\ell^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{\ell^2}{3} \end{pmatrix}$$

**Esempio 8.26 (Anello).** Consideriamo un anello di raggio  $R$  e densità uniforme  $\rho$  e massa  $m$ . Abbiamo

$$(I_G)_{11} = (I_G)_{22}$$

e poichè  $(I_G)_{33} = (I_G)_{11} + (I_G)_{22} = 2(I_G)_{11}$ , è sufficiente calcolare  $(I_G)_{33}$ .

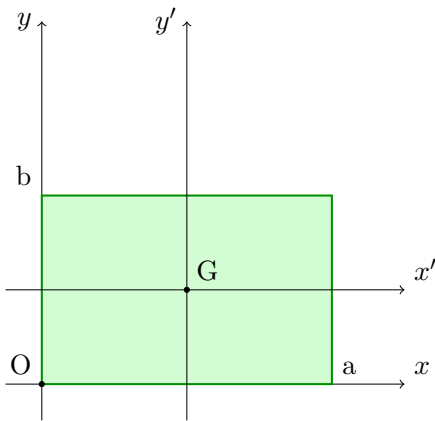


$$\begin{aligned} (I_G)_{33} &= R \int_0^{2\pi} R^2 d\theta \\ &= 2\pi R^3 \\ &= mR^2 \end{aligned}$$

Quindi

$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$$

**Esempio 8.27 (Lamina rettangolare omogenea).** Consideriamo una lamina rettangolare di lati  $a$  e  $b$ . Scegliamo assi coordinati allineati ai lati della lamina come in figura. Abbiamo:



$$\begin{aligned} (I_G)_{11} &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho y^2 dx dy \\ &= \frac{b^3}{12} \\ &= \rho a \frac{b^2}{12} \\ &= \frac{mb^2}{12} \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} (I_G)_{22} &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho x^2 dx dy \\ &= \frac{ma^2}{12} \end{aligned}$$

Ricordando che il sistema è piano e gli assi sono principali di inerzia in quanto perpendicolari ad assi di simmetria materiale possiamo scrivere la matrice di inerzia

$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix}$$

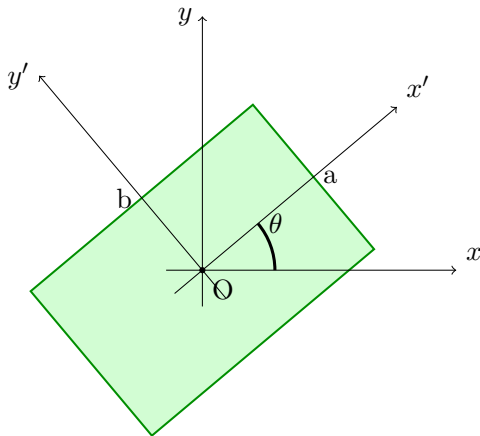
Per calcolare la matrice di inerzia rispetto al polo  $O$ , basta notare che:

$$(G - O) = \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right).$$

e quindi, applicando l'Eq.(8.9), si trova:

$$\begin{aligned} I_O &= I_G + m \begin{pmatrix} \frac{b^2}{4} & -\frac{ab}{4} & 0 \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m\frac{b^2}{3} & -m\frac{ab}{4} & 0 \\ -m\frac{ab}{4} & m\frac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{a^2+b^2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Possiamo ora chiederci, a titolo esemplificativo, come cambia la matrice di inerzia della lamina rettangolare appena vista, mantenendo fisso il polo, ma ruotando la base. Consideriamo quindi la situazione in figura.



Indichiamo con  $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  la base associata agli assi  $x'$  e  $y'$ , e con  $\underline{f} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$  la base associata agli assi  $x$  e  $y$ . Indichiamo con  $I_{O,\underline{f}}$  la matrice di inerzia nella base  $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ , e con  $I_{O,\underline{e}}$  la matrice di inerzia nella base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ . Ricordando la formula (2.25), possiamo scrivere:

$$I_{O,\underline{f}} = R I_{O,\underline{e}} R^T$$

dove  $R$  è la matrice di rotazione che fa passare dalla base  $\underline{e}$  alla base  $\underline{f}$ :

$$R_{ij} := \vec{f}_i \cdot \vec{e}_j$$

(si veda anche la formula (??)). Poichè:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \cos \theta \vec{e}_1 - \sin \theta \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = \sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2 \end{cases}$$

Quindi:

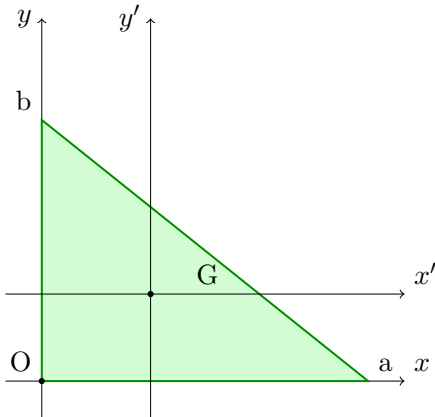
$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

e possiamo concludere che:

$$I_{O,\underline{f}} = \begin{pmatrix} \frac{m}{12} (b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) & \frac{m}{12} (b^2 - a^2) \cos \theta \sin \theta \\ \frac{m}{12} (b^2 - a^2) \cos \theta \sin \theta & \frac{m}{12} (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix}$$

È interessante notare che, se la lamina è quadrata, allora tutti gli assi nel piano  $x-y$  sono principali di inerzia.

**Esempio 8.28 (Lamina triangolare rettangolare).** Consideriamo una lamina triangolare di lati  $a$  e  $b$ . Scegliamo assi coordinati allineati ai lati della lamina come in figura. Abbiamo:



$$\begin{aligned}(I_O)_{11} &= \int_0^a dx \int_0^{b-\frac{b}{a}x} dy \rho y^2 \\ &= \frac{mb^2}{6}\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}(I_O)_{11} &= \int_0^a \rho x^2 dx \int_0^{b-\frac{b}{a}x} dy \\ &= \frac{ma^2}{6}\end{aligned}$$

L'asse perpendicolare alla lamina (asse  $z$ ) è principale di inerzia. Quindi:

$$I_{13} = I_{23} = 0.$$

Rimane quindi da calcolare il momento di deviazione:

$$\begin{aligned}(I_O)_{12} &= -\rho \int_0^a \rho x dx \int_0^{b-\frac{b}{a}x} y dy \\ &= -\frac{mab}{12}\end{aligned}$$

Quindi

$$I_O = \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{6} & -\frac{mab}{12} & 0 \\ -\frac{mab}{12} & \frac{ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{6} \end{pmatrix}$$

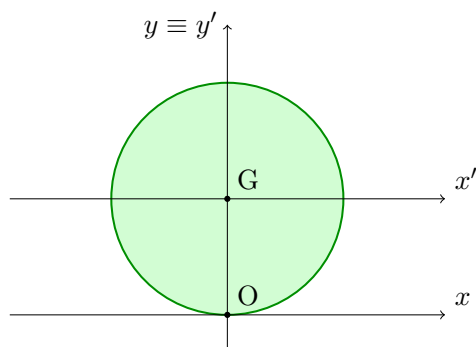
Per determinare la matrice di inerzia rispetto al baricentro basta usare la formula (8.9), ricordando che  $\vec{d} = G - O = (\frac{a}{3}, \frac{b}{3})$  (vedi l'esempio 7.29):

$$\begin{aligned}I_G &= \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{6} & -\frac{mab}{12} & 0 \\ -\frac{mab}{12} & \frac{ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{9} & +\frac{mab}{9} & 0 \\ -\frac{mab}{9} & \frac{ma^2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{9} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{18} & \frac{mab}{36} & 0 \\ \frac{mab}{36} & \frac{ma^2}{18} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{18} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

**Esempio 8.29 (Lamina circolare).** È immediato che

$$(I_G)_{11} = (I_G)_{22}$$

usando coordinate polari,

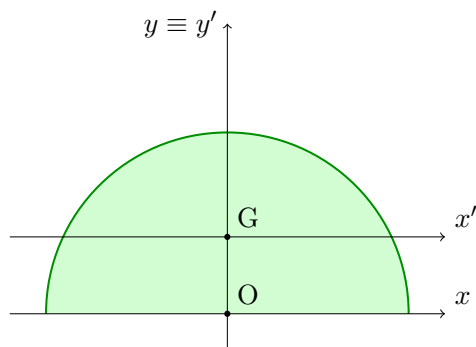


$$\begin{aligned}(I_G)_{33} &= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr r^3 \\ &= 2\pi\rho \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}\end{aligned}$$

Poichè  $(I_G)_{33} = (I_G)_{11} + (I_G)_{22} = 2(I_G)_{11} = 2(I_G)_{22}$ , troviamo

$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}$$

**Esempio 8.30 (Lamina semicircolare).** Calcoliamo la matrice della lamina rispetto al polo  $O$  in figura. Otteniamo



$$\begin{aligned}(I_O)_{11} &= \rho \int_0^\pi d\theta \int_0^R dr r (r \sin \theta)^2 \\ &= \rho \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{mR^2}{4}\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}(I_O)_{22} &= \rho \int_0^\pi d\theta \int_0^R dr r (r \cos \theta)^2 \\ &= \rho \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{mR^2}{4}\end{aligned}$$

Quindi

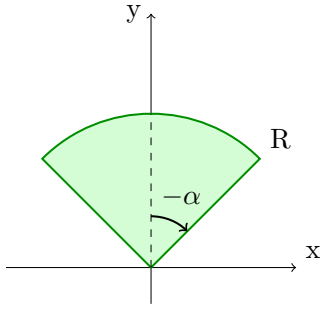
$$(I_O)_{33} = (I_O)_{11} + (I_O)_{22} = \frac{mR^2}{2}$$

Essendo l'asse perpendicolare alla lamina principale di inerzia si ha  $(I_O)_{13} = (I_O)_{23} = 0$ . Quindi rimane da calcolare

$$\begin{aligned}(I_O)_{12} &= \rho \int_0^\pi d\theta \int_0^R dr r^3 \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^\pi \sin 2\theta d\theta \int_0^R r^3 dr \\ &= 0\end{aligned}$$

Questo risultato è in realtà ovvio se si nota che  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_3$  sono perpendicolari ad assi principali di inerzia.

**Esempio 8.31 (Settore circolare).** Calcoliamo la matrice della lamina rispetto al polo  $O$  in figura.



Notiamo preliminarmente che  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_3$  sono ortogonali a piani di simmetria materiale. Quindi sono assi principali di inerzia e quindi anche  $\vec{e}_2$  lo è. Procediamo col calcolo di  $(I_O)_{11}$  e  $(I_O)_{22}$ :

$$\begin{aligned} (I_O)_{11} &= \rho \int_{S_R} y^2 dx dy \\ &= \rho \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \sin^2 \theta d\theta \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{\rho R^4}{4} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\rho R^4}{8} [2\alpha + \sin 2\alpha] \\ &= \frac{mR^2}{4} \left( 1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I_O)_{22} &= \rho \int_{S_R} x^2 dx dy \\ &= \rho \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \cos^2 \theta d\theta \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{\rho R^4}{4} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{mR^2}{4} \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) \end{aligned}$$

Quindi:

$$I_O = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} \left( 1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}$$

**Esempio 8.32 (Corona circolare).** Consideriamo una corona circolare di raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$ , densità di massa uniforme  $\rho$  e massa  $m$ .

Allora

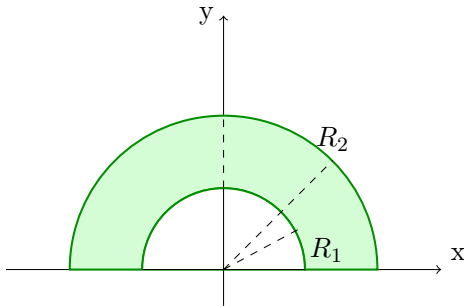
$$\rho = \frac{2m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

Chiaramente

$$\mathcal{B} = C_{R_2} \setminus C_{R_1}$$

in cui i due cerchi hanno masse:

$$m_2 = \frac{mR_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)} \quad m_1 = \frac{mR_1^2}{(R_2^2 - R_1^2)}$$



Quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}I_O &= C_{R_2}I_O - C_{R_1}I_O \\ &= \begin{pmatrix} \frac{m_2R_2^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2R_2^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2R_2^2}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{m_1R_1^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1R_1^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1R_1^2}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{m(R_2^2+R_1^2)}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(R_2^2+R_1^2)}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(R_2^2+R_1^2)}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$