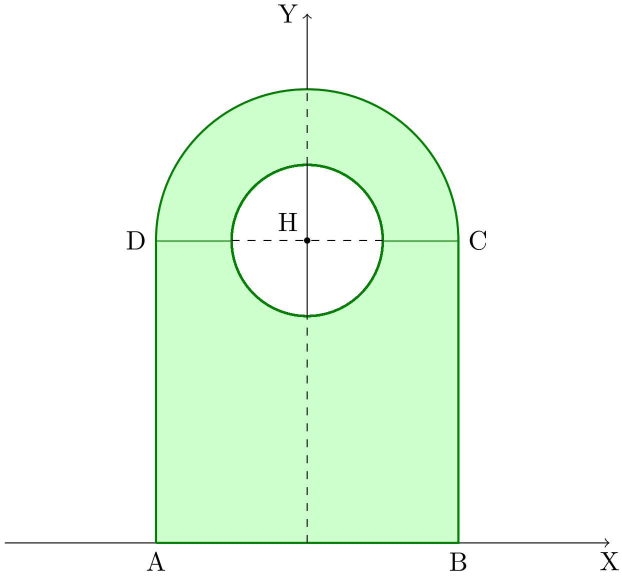
Esercitazione (Genova, Maggio 2013)

Problema 1 La lamina omogenea di massa M rappresentata in figura è ottenuta saldando una lamina quadrata $ABCD$ con una lamina semicircolare di raggio $R_1 = \frac{\overline{DC}}{2}$ e centro nel punto medio del lato DC, e operando un foro circolare di raggio $R_2 = \frac{\overline{DC}}{4}$, sempre con centro nel punto medio del lato DC.



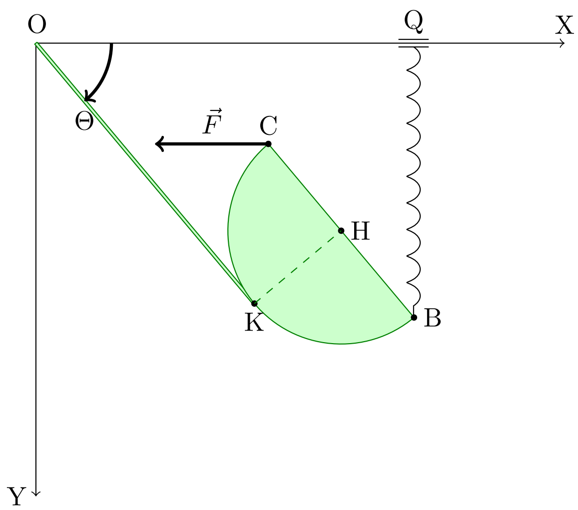
Supponendo:

$$\begin{cases} \overline{AB} = 2a \end{cases}$$

si determinino:

1. le coordinate (x_G, y_G) del *baricentro* della lamina;
2. la *matrice di inerzia* $(I_H)_{ij}$ della lamina rispetto al polo H ed al sistema di assi $\{X, Y\}$.
3. l'elemento $(I_G)_{11}$

Problema 2 Si consideri un sistema rigido di massa M composto da un'asta di massa trascurabile e lunghezza $2a$ saldata, nel modo illustrato in figura, con una lamina omogenea a forma di semicerchio di raggio $\overline{HK} = a$ (si ha $KO \perp KH$). Il sistema ha il vertice O incernierato nell'origine degli assi ed è libero di ruotare nel piano verticale (X, Y) (Y è l'asse verticale). Il dispositivo che realizza il vincolo in O è ideale. Una molla di costante elastica κ e lunghezza a riposo nulla collega il punto B con un pattino Q che durante il moto scorre senza attrito lungo l'asse X in modo che risulti sempre $(B - Q)$ parallelo all'asse Y. È inoltre presente una forza $\vec{F}$, applicata in C, di modulo costante F, direzione parallela all'asse X e verso indicato in figura.



Sapendo che: le condizioni iniziali del moto sono date da:

$$\begin{cases} \theta(0) &= \frac{\pi}{2}\,\text{rad} \\ \dot{\theta}(0) &= 1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \end{cases}$$

si determinino:

1. l'*equazione cardinale* delle forze e l'*equazione cardinale* dei momenti *rispetto al polo* O per il sistema rigido;
2. la *velocità* $\vec{v}_H$ del punto H all'istante $t = 0$.
3. la reazione vincolare $\vec{\Phi}_O$ nel polo O al tempo $t = 0$.

ES 2 $\quad x_G = 0$ perché $x=0$ è asse di simmetria materiale.

① ② ③

$$A_{tot} = 4a^2 + \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{4} = 4a^2 + \frac{\pi a^2}{4}$$

$$A_1 = 4a^2 \qquad A_2 = \frac{\pi a^2}{2} \qquad A_3 = \frac{\pi a^2}{4}$$

$$y_G = \frac{4}{(16+\pi)a^2}\left[(4a^2)\cdot a + \frac{\pi a^2}{2}\left(2a + \frac{4}{3\pi}a\right) - \frac{\pi a^2}{4}\cdot 2a\right] =$$

$$= \frac{2a}{3(16+\pi)}(28+3\pi)$$

2. Detto K il baricentro della lamina quadrata.

$$\underline{\underline{I}}^{①}_K = \begin{pmatrix} \frac{m_1 a^2}{3} & & \\ & \frac{m_1 a^2}{3} & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{I}}^{①}_H = \underline{\underline{I}}^{①}_K + m_1\begin{pmatrix} a^2 & & \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}m_1 a^2 & & \\ & \frac{m_1 a^2}{3} & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{I}}_H = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}m_1 a^2 & & \\ & \frac{m_1 a^2}{3} & \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{m_2}{4}(a^2) & & \\ & \frac{m_2}{4}(a^2) & \\ & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{m_3}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 & & \\ & \frac{m_3}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}m_1 a^2 & & \\ & \frac{m_1 a^2}{3} & \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{m_2 a^2}{4} & & \\ & \frac{m_2 a^2}{4} & \\ & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{m_3 a^2}{16} & & \\ & \frac{m_3 a^2}{16} & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$m_1 = M\frac{A_1}{A_{tot}} = M\frac{16a^2}{(16+\pi)a^2} = \frac{16M}{16+\pi}$$

$$m_2 = M\frac{A_2}{A_{tot}} = M\frac{2\pi}{16+\pi} \qquad m_3 = M\frac{A_3}{A_{tot}} = M\frac{\pi}{16+\pi}$$

Sostituendo

$$\underline{\underline{I}}_H = \frac{Ma^2}{16+\pi}\begin{pmatrix} \frac{4}{3}\cdot 16 + \frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{16} & & \\ & \frac{16}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16} & \\ & & \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{Ma^2}{16+\pi}\begin{pmatrix} \frac{64}{3} + \frac{7\pi}{16} & & \\ & \frac{16}{3} + \frac{7}{16}\pi & \\ & & \end{pmatrix} \qquad (\underline{\underline{I}}_H)_{33} = \frac{80}{3} + \frac{7}{8}\pi.$$

$$(I_G)_{11} = \frac{Ma^2}{16+\pi}\left(\frac{64}{3}+\frac{7\pi}{16}\right) - M\left[2a - \frac{2a(16+3\pi)}{3(16+\pi)}\right]^2$$

<u>ES 3</u> I^ equazione cardinale.

$$\mathcal{F} = \{ M\vec{g}, \vec{F}, -k(B-Q) \}.$$

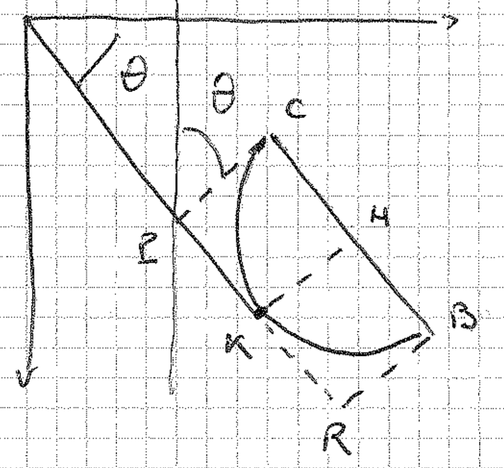
$$G-O = G-K+K-O = \left(a - \frac{4}{3\pi}\right)(\sin\theta, -\cos\theta) + 2a(\cos\theta, \sin\theta) =$$

$$= a\left(2\cos\theta + (1-4/3\pi)\sin\theta,\ 2\sin\theta - \left(1-\frac{4}{3\pi}\right)\cos\theta\right)$$

$$\vec{v}_G = a\left(-2\dot\theta\sin\theta + (1-4/3\pi)\dot\theta\cos\theta,\ 2\dot\theta\cos\theta + (1-4/3\pi)\dot\theta\sin\theta\right)$$

$$\vec{a}_G = a\Big(-2\ddot\theta\sin\theta - 2\dot\theta^2\cos\theta + \left(1-\frac{4}{3\pi}\right)(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta),$$
$$2\ddot\theta\cos\theta - 2\dot\theta^2\sin\theta + (1-4/3\pi)(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta)\Big)$$

Bene



$$B-O = B-R+R-O = a(\sin\theta, -\cos\theta) + 3a(\cos\theta, \sin\theta) =$$

$$= a(\sin\theta + 3\cos\theta,\ 3\sin\theta - \cos\theta).$$

$$\Rightarrow\ B-Q = (B-O)_y = a(0,\ 3\sin\theta - \cos\theta).$$

Possiamo concludere

$$\begin{cases} R_x^{(v)} - F = Ma\left(-2\ddot\theta\sin\theta - 2\dot\theta^2\cos\theta + \left(1-\frac{4}{3\pi}\right)(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta)\right) \\ R_y^{(v)} + Mg - ak(3\sin\theta - \cos\theta) = Ma\Big(2\ddot\theta\cos\theta - 2\dot\theta^2\sin\theta + \\ \qquad + \left(1-\frac{4}{3\pi}\right)(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta)\Big) \end{cases}$$

$\underline{\text{II}}$ EQ CARDINALE.

$$(C-O)=(C-P)+(P-O)=a(\cos\theta,\sin\theta)+a(\sin\theta,-\cos\theta)=$$
$$=a(\cos\theta+\sin\theta,\sin\theta-\cos\theta)$$

I momenti delle forze rispetto al polo O sono quindi

$$(G-O)\wedge M\vec{g}=Mga\left(2\cos\theta+\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)\sin\theta\right)\vec{e}_3$$

$$(C-O)\wedge\vec{F}=aF(\sin\theta-\cos\theta)\vec{e}_3$$

$$(B-O)\wedge[-k(B-Q)]=-a^2k(\sin\theta+3\cos\theta)(-\cos\theta+3\sin\theta)\vec{e}_3$$

VELOCITÀ ANGOLARE.

$$\vec{\omega}=\dot{\theta}\vec{e}_3$$

MOMENTO DI INERZIA.

$$(I_O)_{33}=(I_G)_{33}+M|G-O|^2=(I_H)_{33}-M|G-H|^2+M|G-O|^2=$$
$$=\frac{Ma^2}{2}-M\left(\frac{4}{3\pi}a\right)^2+M\left[4a^2+\left(a-\frac{4}{3\pi}a\right)^2\right]=$$
$$=\frac{Ma^2}{2}+M\left[5a^2-\frac{8}{3\pi}a^2\right]=Ma^2\left[\frac{11}{2}-\frac{8}{3\pi}\right]$$

Quindi la II eq^{ne} cardinale è

$$\underset{(A)}{\vec{M}_O^{(a)}}+\underset{(B)}{\vec{M}_O^{(v)}}=\underset{(C)}{I_O(\dot{\vec{\omega}})}+\underset{(D)}{\vec{\omega}\wedge I_O(\vec{\omega})}+\underset{(E)}{M(G-O)\wedge\vec{a}_O}$$

(B) = 0 perché VINCOLO IDEALE (in realtà $M_{O3}^{(v)}=0$ x vincolo ideale. $M_{O1}^{(v)}=M_{O2}^{(v)}=0$ da 2 eq^{ni} cardinali)

(D) = 0 perché $\vec{\omega}\wedge I_O(\vec{\omega})=\dot{\theta}^2 I_3\,\vec{e}_3\wedge\vec{e}_3=0$

(E) = 0 perché $\vec{a}_O=0$ (O è fisso).

$$\Rightarrow\quad \vec{M}_O^{(a)}=I_O(\dot{\vec{\omega}})$$

$$Mga\left[2\cos\theta+\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)\sin\theta\right]+aF(\sin\theta-\cos\theta)-a^2k(\sin\theta+3\cos\theta)(-\cos\theta+3\sin\theta)$$

$$=Ma^2\left(\frac{11}{2}-\frac{8}{3\pi}\right)\ddot{\theta}$$

(2) $\vec{v}_H(0)=?$

$$\vec{v}_H(0)=\frac{d}{dt}(H-O)\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}a(\sin\theta+2\cos\theta,\ 2\sin\theta-\cos\theta)=$$

$$=a(\dot{\theta}\cos\theta-2\dot{\theta}\sin\theta,\ 2\dot{\theta}\cos\theta+\dot{\theta}\sin\theta)\Big|_{t=0}=$$

$$=a(\dot{\theta}(0)\cos\theta(0)-2\dot{\theta}(0)\sin\theta(0),\ 2\dot{\theta}(0)\cos\theta(0)+\dot{\theta}(0)\sin\theta(0))$$

$$=a(-2,\ 1).$$

(3) Reazione vincolare a $t=0$

$$\begin{cases} R_x^{(v)}=F+Ma\left[-2\ddot{\theta}(0)\mp\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)\right] \\ R_y^{(v)}=3ak-Mg+Ma\left(-2+\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)\ddot{\theta}(0)\right)\end{cases}$$

dove

$$\ddot{\theta}(0)=\frac{1}{Ma^2\left(\frac{11}{2}-\frac{8}{3\pi}\right)}\left[Mga\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)+aF-3a^2k\right]$$