Disco vincolato con punto fisso e due gradi di libertà

4. 4. 5 *Un disco, di massa* m *e raggio* R*, può ruotare mantenendo un punto* O*, della circonferenza, fisso. Il vincolo in* O *consente rotazioni attorno all'asse orizzontale perpendicolare al disco e rotazioni attorno all'asse verticale. Assumendo come coordinate libere l'angolo* θ *tra il diametro passante per* O *e l'asse verticale e l'angolo* ϕ *tra il disco e un piano verticale di riferimento,*

(a) scrivere le equazioni del moto;

(b) verificare se sono possibili moti del tipo $\theta(t) = \theta_0$, $\phi(t) = \dot{\phi}_0 t$.

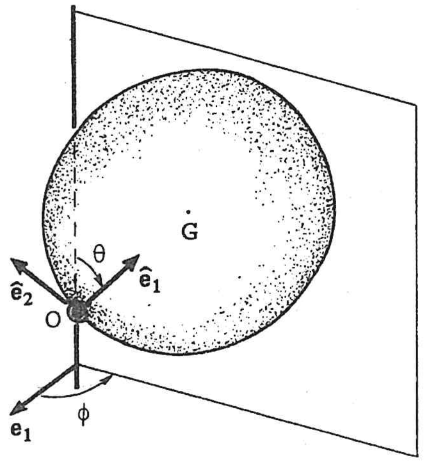
Assegnate le condizioni iniziali $\phi(0) = 0$, $\theta(0) = \pi/6$, $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$,

(c) determinare gli eventuali integrali primi del moto;

(d) calcolare i valori assunti da $\dot{\theta}$ *e* $\dot{\phi}$ *allorché* $\theta = \pi/2$.

(a) Sia G il baricentro e $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del disco. Poniamo $\hat{e}_1 = \frac{(G-O)}{|G-O|}$, $\hat{e}_3 = -\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\theta}}$ e adottiamo $(O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, $\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1$, come base solidale.

Utilizziamo il formalismo lagrangiano e osserviamo anzitutto che l'energia potenziale è data da



$$V = mgR\cos\theta .$$

Poiché il punto O del disco è fisso possiamo scrivere l'energia cinetica nella forma

$$T = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot \mathbf{I}_O\boldsymbol{\omega} .$$

Nella terna solidale scelta, l'operatore $\mathbf{I}_O$ è rappresentato dalla matrice diagonale

$$I_O = \mathrm{diag}\left(\frac{mR^2}{4},\ \frac{5mR^2}{4},\ \frac{3mR^2}{2}\right).$$

Denotando con $\mathbf{e}_3$ il versore verticale (ascendente) si ha

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\phi\mathbf{e}_3 - \dot\theta\hat{\mathbf{e}}_3$$

e quindi

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\phi\,(\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_2) - \dot\theta\,\hat{\mathbf{e}}_3 .$$

Sostituendo si ottiene l'espressione dell'energia cinetica nella forma

$$T = \frac{mR^2}{8}[(1+4\sin^2\theta)\,\dot\phi^2 + 6\dot\theta^2] .$$

Ne segue che la lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{8}[(1+4\sin^2\theta)\,\dot\phi^2 + 6\dot\theta^2] - mgR\cos\theta$$

e le equazioni differenziali del moto da

$$\frac{d}{dt}[(1+4\sin^2\theta)\,\dot\phi] = (1+4\sin^2\theta)\,\ddot\phi + 8\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta\,\dot\phi = 0, \tag{1}$$

$$3R\ddot\theta - 2R\sin\theta\cos\theta\,\dot\phi^2 - 2g\sin\theta = 0. \tag{2}$$

(b) Sostituendo $\theta=\theta_0$, $\phi=\dot\phi_0 t$, la (1) risulta identicamente soddisfatta mentre la (2) fornisce la relazione

$$\sin\theta_0\,(R\cos\theta_0\,\dot\phi_0^2 + g) = 0;$$

essa è verificata allorché

$$\theta_0 = 0,\pi,,\quad \dot\phi_0 \text{ arbitrario}, \tag{3}$$

oppure

$$R\cos\theta_0\,\dot\phi_0^2 + g = 0. \tag{4}$$

Naturalmente la (4) sussiste per velocità angolari sufficientemente grandi ossia per

$$R\dot\phi_0^2 \geqslant g.$$

(c) Un integrale primo è evidente dalla (1) ed è conseguenza del fatto che $\partial\mathcal{L}/\partial\phi=0$ (integrale primo di Poisson); tenuto conto delle condizioni iniziali si ha

$$(1+4\sin^2\theta)\,\dot\phi = 2\omega_0 . \tag{5}$$

La (5) esprime la conservazione di $\mathbf{L}_O\cdot\mathbf{e}_3$.

Un altro integrale primo segue osservando che la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo; tenuto conto delle condizioni iniziali si perviene alla conservazione dell'energia totale (integrale di Jacobi) nella forma

$$\frac{mR^2}{8}[(1+4\sin^2\theta)\,\dot\phi^2 + 6\dot\theta^2] + mgR\cos\theta = \frac{mR^2}{4}\omega_0^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}mgR. \tag{6}$$

(d) Imponendo $\theta=\pi/2$ nella (5) si ha

$$\dot\phi = \frac{2\omega_0}{5} .$$

Sostituendo nella (6) si ottiene

$$\dot\theta = \pm\left(\frac{1}{5}\omega_0^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{g}{R}\right)^{1/2}$$

l'indeterminazione sul segno significa che il disco può passare per $\theta=\pi/2$ sia allorché θ è crescente sia allorché θ è descrescente.