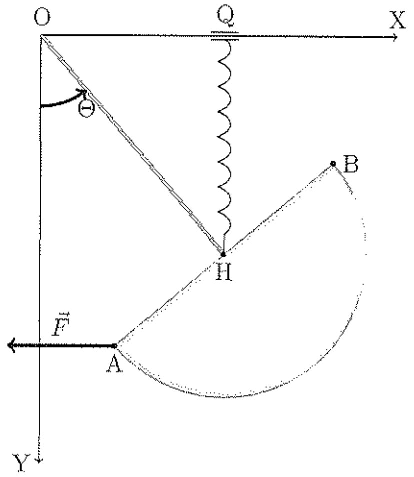
Esercizio Fisica Matematica

Problema 1 Si consideri un sistema rigido di massa M composto da un'asta di massa trascurabile e lunghezza $2a$ saldata con una lamina semicircolare omogenea di raggio a, nel modo illustrato in figura (si ha $\overline{AH} = \overline{BH}$ e $OH \perp AB$). Il sistema ha il vertice O incernierato nell'origine degli assi ed è libero di ruotare nel piano verticale (X, Y) (Y è l'asse verticale). Il dispositivo che realizza il vincolo è ideale. Una molla di costante elastica κ e lunghezza a riposo nulla collega il punto H con un pattino Q che durante il moto scorre senza attrito lungo l'asse X in modo che risulti sempre $(H - Q)$ parallelo all'asse Y. È inoltre presente una forza $\vec{F}$, applicata in A, di modulo costante F, direzione parallela all'asse X e verso indicato in figura.



Sapendo che: le condizioni iniziali del moto sono date da:

$$\begin{cases} \theta(0) & = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad} \\ \dot{\theta}(0) & = 1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}} \end{cases}$$

si determinino:

1. l'*equazione cardinale* delle forze e l'*equazione cardinale* dei momenti *rispetto al polo O* per il sistema rigido;
2. la *velocità* $\vec{v}_B$ del punto B all'istante $t = 0$.
3. l'energia cinetica del sistema rigido

$\text{I}^{\wedge}$ Eq^{ne} cardinale

$$\vec R^{(a)} + \vec R^{(v)} = M \vec a_G$$

$$\vec{\mathcal{F}} = \left\{ M\vec g,\ -k(H-Q),\ \vec F \right\}$$

$$H-Q = (0,\ 2a\cos\theta)$$

$$G-O = (H-O) + (G-H)$$

$$H-O = 2a(\sin\theta,\ \cos\theta) \qquad G-H = \frac{4}{3\pi}a(\sin\theta,\ \cos\theta)$$

$$G-O = \left(\frac{4}{3\pi}+2\right)a(\sin\theta,\ \cos\theta)$$

$$\vec v_G = \left(\frac{4}{3\pi}+2\right)a\left(\dot\theta\cos\theta,\ -\dot\theta\sin\theta\right)$$

$$\vec a_G = \left(\frac{4}{3\pi}+2\right)a\left(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta,\ -\dot\theta^2\cos\theta - \ddot\theta\sin\theta\right)$$

$$\begin{cases} -F + R_x^{(v)} = \left(\dfrac{4}{3\pi}+2\right)Ma\left(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta\right) \\[2ex] Mg - 2ak\cos\theta + R_y^{(v)} = \left(\dfrac{4}{3\pi}+2\right)Ma\left(-\dot\theta^2\cos\theta - \ddot\theta\sin\theta\right) \end{cases}$$

$\underline{II}^{\wedge}$ Eq$^{\underline{ne}}$ cardinale.

$$\vec{M}_O^{(a)} + \underset{\substack{\| \\ 0}}{\vec{M}_O^{(v)}} = I_O(\dot{\vec{\omega}}) + \underbrace{\vec{\omega} \wedge I_O(\vec{\omega})}_{=0 \text{ perché } \vec{\omega} \parallel I_O(\vec{\omega})} + \underbrace{M(G-O) \wedge \vec{a}_O}_{=0 \text{ (polo fisso)}}$$

per idealità del vincolo

⊕ II eq$^{\underline{ne}}$ cardinale lungo x e y.

$$\Rightarrow \quad M_{O3}^{(a)} = (I_O)_{33}\, \dot{\omega}$$

dove

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\, \vec{e}_3$$

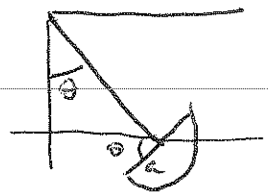
$$(I_O)_{33} = (I_G)_{33} + M\left(2a + \frac{4}{3\pi}a\right)^2 =$$

$$= (I_H)_{33} - M\left(\frac{4}{3\pi}a\right)^2 + M\left(2a + \frac{4}{3\pi}a\right)^2 =$$

$$= \frac{Ma^2}{2} + M4a^2 + M\frac{16a^2}{3\pi} =$$

$$= \left(\frac{9}{2} + \frac{16}{3\pi}\right)Ma^2.$$

$$\vec{M}_O^{(a)} = (G-O) \wedge M\vec{g} + (H-O) \wedge [-k(H-Q)] + (A-O) \wedge \vec{F}.$$



$$A - O = (A-H) + (H-O)$$

$$A - H = a(-\cos\theta, \sin\theta)$$

$$H - O = 2a(\sin\theta, \cos\theta)$$

$$A - O = a(2\sin\theta - \cos\theta,\ 2\cos\theta + \sin\theta).$$

$$(A-O)\wedge\vec{F} = a(2\cos\theta+\sin\theta)F\,\vec{e}_3 .$$

$$(G-O)\wedge M\vec{g} = \left(\frac{4}{3\pi}+2\right)Mga\sin\theta\,\vec{e}_3$$

$$(H-O)\wedge\left[-k(H-Q)\right] = (Q-O)\wedge\left[-k(H-Q)\right] =$$

$$= -2ka\sin\theta\,(2a\cos\theta)\,\vec{e}_3 =$$

$$= -4a^2k\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_3 =$$

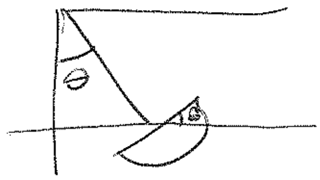
$$= -2a^2k\sin 2\theta\,\vec{e}_3 .$$

$\Rightarrow$

$$(2\cos\theta+\sin\theta)aF + \left(\frac{4}{3\pi}+2\right)Mga\sin\theta - 2a^2k\sin 2\theta =$$

$$= -\left(\frac{9}{2}+\frac{16}{3\pi}\right)Ma^2\ddot{\theta}$$

- Velocità di B



$$B-O = a(\cos\theta, -\sin\theta) + 2a(\sin\theta, \cos\theta) =$$

$$= a(\cos\theta + 2\sin\theta, 2\cos\theta - \sin\theta).$$

$$\vec{v}_B = a(-\dot\theta\sin\theta + 2\dot\theta\cos\theta, -2\dot\theta\sin\theta - \dot\theta\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_B(0) = a(-1, -2)$$

- Energia cinetica del sistema rigido

$$T = \frac{1}{2}(I_O)_{33}\,\dot\theta^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{12} + \frac{16}{3\pi}\right)Ma^2\dot\theta^2$$