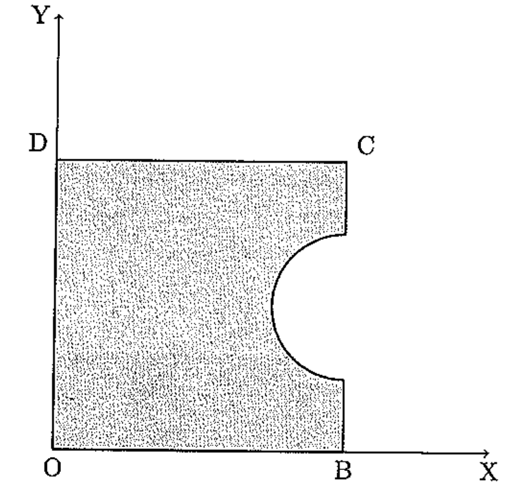
Problema 1 La lamina omogenea di massa M rappresentata in figura è ottenuta da una lamina quadrata $OBCD$ operando un foro semicircolare di raggio $R = \frac{\overline{OB}}{4}$ e centro nel punto medio del lato BC.



Supponendo:

$$\left\{ \overline{OB} = 2a \right.$$

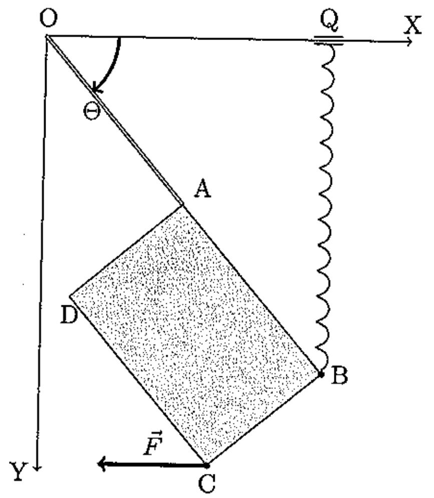
si determinino:

1. le coordinate (X_G, Y_G) del *baricentro* della lamina;
2. gli elementi $(I_O)_{11}$ e $(I_O)_{12}$ della *matrice di inerzia* della lamina rispetto al polo O ed al sistema di assi $\{X, Y\}$.

Soluzione :

1. $\left(\frac{2a(49-3\pi)}{96-3\pi}, a\right)$
2. $(I_O)_{11} = \left(\frac{128}{3} - \frac{17\pi}{16}\right)\frac{Ma^2}{32-\pi}$, $(I_O)_{12} = -\left(\frac{98}{3} - 2\pi\right)\frac{Ma^2}{32-\pi}$,

Problema 2 Si consideri un sistema rigido di massa M composto da un'asta di massa trascurabile e lunghezza $2a$ saldata, nel modo illustrato in figura, con una lamina rettangolare omogenea $ABCD$ di lati $\overline{AB} = 2a$ e $\overline{BC} = a$ (si ha $OA \perp AD$). Il sistema ha il vertice O incernierato nell'origine degli assi ed è libero di ruotare senza attrito nel piano verticale (X, Y) (Y è l'asse verticale). Una molla di costante elastica κ e lunghezza a riposo nulla collega il punto B con un pattino Q che durante il moto scorre senza attrito lungo l'asse X in modo che risulti sempre $(B - Q)$ parallelo all'asse Y. È inoltre presente una forza $\vec{F}$, applicata in C, di modulo costante F, direzione parallela all'asse X e verso indicato in figura.

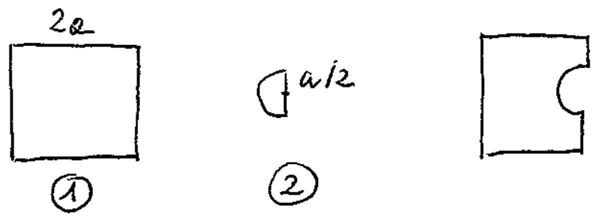


Sapendo che: le condizioni iniziali del moto sono date da:

$$\begin{cases} \theta(0) &= \frac{\pi}{2}\,\text{rad} \\ \dot{\theta}(0) &= 1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \end{cases}$$

si determinino:

1. l'*equazione cardinale* delle forze e l'*equazione cardinale* dei momenti *rispetto al polo O* per il sistema rigido;
2. la *velocità* $\vec{v}_D$ del punto D all'istante $t = 0$.
3. la reazione vincolare $\vec{\Phi}_O$ nel polo O al tempo $t = 0$.



$= ① - ②$

Problema 1

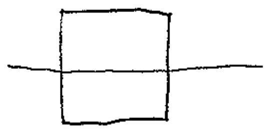
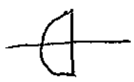
$$A_{tot} = (2a)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4a^2 - \frac{\pi a^2}{8} = \frac{a^2}{8}(32-\pi) \qquad \rho = \frac{m}{A_{tot}} = \frac{8m}{a^2(32-\pi)}$$

$$m_1 = 4a^2\rho = \frac{32m}{32-\pi} \qquad m_2 = \frac{1}{2}\pi\frac{a^2}{4}\rho = \frac{\pi m}{32-\pi}$$

1. $y_G = a$ perché l'esse $y=a$ è di simmetria

$$x_G = \frac{m_1 x_{G1}}{m} - \frac{m_2 x_{G2}}{m} = \frac{32}{32-\pi}a - \frac{\pi}{32-\pi}\left(2a - \frac{4\,a/2}{3\pi}\right)$$

$$= \frac{2a}{32-\pi}\left(16 - \pi + \frac{1}{3}\right) = \frac{2a(49-3\pi)}{3(32-\pi)}$$

2.  $\frac{m\ell^2}{12}$  $\frac{mR^2}{4}$ $\qquad I^O_{11} = I^G_{11} + ma^2$

$$I^O_{11} = I^{G_1}_{11} - I^{G_2}_{11} + ma^2 = \frac{m_1(2a)^2}{12} - \frac{m_2(a/2)^2}{4} + ma^2 =$$

$$= \frac{32m}{32-\pi}\frac{4a^2}{12} - \frac{\pi m}{32-\pi}\frac{a^2}{16} + ma^2 =$$

$$= \frac{ma^2}{32-\pi}\left(\frac{32}{3} - \frac{\pi}{16} + 32 - \pi\right) = \frac{ma^2}{32-\pi}\left(\frac{128}{3} - \frac{17\pi}{16}\right)$$

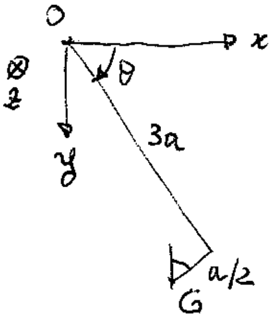
$$I^O_{12} = (I_O)^{①}_{12} - (I_O)^{②}_{12} = -\left[m_1(d_1d_2)^{①} - m_2(d_1d_2)^{②}\right]$$

$$= -\left[\frac{32}{32-\pi}(a\cdot a) - \frac{\pi m}{32-\pi}\left(a\cdot\left(2a - \frac{4a/2}{3\pi}\right)\right)\right]$$

$$= -\frac{ma^2}{32-\pi}\left(32 - 2\pi + \frac{2}{3}\right) = -\frac{ma^2}{32-\pi}\left(\frac{98}{3} - 2\pi\right)$$

1. Prima equazione cardinale $\underline{\Phi} + \underline{F} + m\underline{g} - k(B-Q) = m\underline{a}_G$

$$\underline{\Phi} = \Phi_x \underline{e}_1 + \Phi_y \underline{e}_2 , \quad \underline{F} = -F\underline{e}_1 , \quad m\underline{g} = mg\underline{e}_2 , \quad -k(B-Q) = -k\,4a\sin\theta\,\underline{e}_2$$



$$G-O = \begin{cases} 3a\cos\theta - \frac{a}{2}\sin\theta \\ 3a\sin\theta + \frac{a}{2}\cos\theta \end{cases}$$

$$\underline{v}_G = \begin{cases} -3a\sin\theta\,\dot\theta - \frac{a}{2}\cos\theta\,\dot\theta \\ 3a\cos\theta\,\dot\theta - \frac{a}{2}\sin\theta\,\dot\theta \end{cases}$$

$$\underline{a}_G = \begin{cases} -3a(\sin\theta\,\ddot\theta + \cos\theta\,\dot\theta^2) - \frac{a}{2}(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\,\dot\theta^2) \\ 3a(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\,\dot\theta^2) - \frac{a}{2}(\sin\theta\,\ddot\theta + \cos\theta\,\dot\theta^2) \end{cases}$$

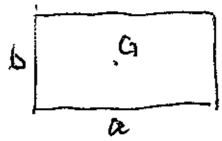
$$\begin{cases} \Phi_x - F = m a_{Gx} \\ \Phi_y + mg - 4ka\sin\theta = m a_{Gy} \end{cases}$$

Seconda equazione cardinale

$$(C-O)\times\underline{F} + (G-O)\times m\underline{g} + (B-O)\times(-k(B-Q)) = \underline{\underline{I}}_O\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega}\times\underline{\underline{I}}_O\underline{\omega} + m(G-O)\times\underline{a}_O$$

II membro: $\underline{a}_O = \underline{0}$ (O fisso); $\underline{\omega}\times\underline{\underline{I}}_O\underline{\omega} = \underline{0}$ perché $\underline{\omega}$ è diretto lungo un asse principale

$$\underline{\underline{I}}_O\dot{\underline{\omega}} = I_O\dot\omega\,\underline{e}_3 , \quad \underline{\omega} = \dot\theta\,\underline{e}_3 \Rightarrow \underline{\underline{I}}_O\dot{\underline{\omega}} = I_O\ddot\theta\,\underline{e}_3$$



$$I_3^G = \frac{m(a^2+b^2)}{12}$$

$$I_O = I_G + m|G-O|^2 = \frac{m}{12}(4a^2+a^2) + m\left(9a^2+\frac{a^2}{4}\right) =$$

$$= ma^2\left(\frac{5}{12} + 9 + \frac{1}{4}\right) = \frac{29}{3}ma^2$$

I membro: $C-O = \begin{cases} 4a\cos\theta - a\sin\theta \\ 4a\sin\theta + a\cos\theta \end{cases}$ $\quad B-O = \begin{cases} 4a\cos\theta \\ 4a\sin\theta \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 4a\cos\theta - a\sin\theta & 4a\sin\theta + a\cos\theta & 0 \\ -F & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 3a\cos\theta - \frac{a}{2}\sin\theta & 3a\sin\theta + \frac{a}{2}\cos\theta & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 4a\cos\theta & 4a\sin\theta & 0 \\ 0 & -4ka\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{e}_3 \left[F(4a\sin\theta + a\cos\theta) + mg\left(3a\cos\theta - \frac{a}{2}\sin\theta\right) - 16Ka^2\sin\theta\cos\theta \right]$$

$$= M_O \underline{e}_3 \quad ; \quad \text{l'equazione è} \quad M_O = \frac{29}{3} ma^2 \ddot{\theta}$$

2. <u>Velocità di D all'istante iniziale : $\underline{v}_D(0)$</u>

$$D = \begin{cases} 2a\cos\theta - a\sin\theta \\ 2a\sin\theta + a\cos\theta \end{cases} \qquad \underline{v}_D = \begin{cases} -2a\sin\theta\,\dot{\theta} - a\cos\theta\,\dot{\theta} \\ 2a\cos\theta\,\dot{\theta} - a\sin\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

per $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ha $\sin\theta = 1$ e $\cos\theta = 0$ da cui $\underline{v}_D(0) = \begin{cases} -2a \\ -a \end{cases}$

3. <u>$\underline{\Phi}_O(0)$.</u> Dalla 1ª equazione cardinale si ha

$$\Phi_x(0) = F + m\left(-3a\ddot{\theta}(0) + \frac{a}{2}\right)$$

$$\Phi_y(0) = -mg + 4Ka + m\left(-3a - \frac{a}{2}\ddot{\theta}(0)\right)$$

dove $\ddot{\theta}(0)$ si ricava dalla 2ª equazione cardinale e vale

$$\ddot{\theta}(0) = \frac{3}{29ma^2}\left(4aF - \frac{mga}{2}\right)$$