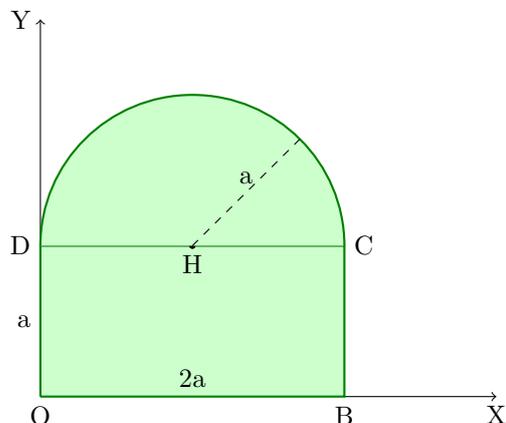


Esercizi sui tensori di inerzia

Problema 1 Si consideri la lamina omogenea di massa M schematizzata in figura e ottenuta saldando una lamina rettangolare $OBCD$ con una lamina semicircolare di raggio a e centro nel punto medio del lato DC .



Come indicato in figura le lunghezze dei lati della lamina rettangolare sono

$$\begin{cases} \overline{BO} = \overline{DC} = 2a \\ \overline{CB} = \overline{OD} = a \end{cases}$$

Si determinino:

1. la *posizione del baricentro* della lamina;
2. la *matrice di inerzia* della lamina rispetto al polo O ed al sistema di assi $\{X, Y\}$.

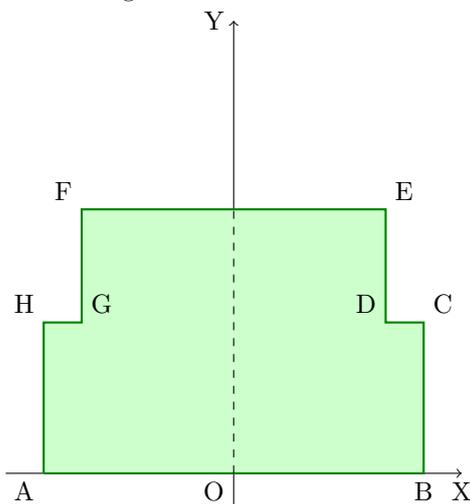
Soluzione :

1. $\left(a, \frac{10+3\pi}{3(4+\pi)}a\right)$

2.

$$I_O = \begin{pmatrix} \frac{Ma^2}{\pi+4} \left(4 + \frac{5}{4}\pi\right) & -\frac{Ma^2}{\pi+4} \left(3 + \frac{4}{3\pi}\right) & 0 \\ -\frac{Ma^2}{\pi+4} \left(3 + \frac{4}{3\pi}\right) & -\frac{Ma^2}{\pi+4} \left(\frac{16}{3} + \frac{5}{4}\pi\right) & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Problema 1 La lamina omogenea di massa M rappresentata in figura è ottenuta saldando insieme due lamine rettangolari $ABCH$ e $DEFG$.



Supponendo che l'asse y bisechi sia AB che GD , e che:

$$\begin{cases} \overline{AB} = 4a \\ \overline{EF} = 3a \\ \overline{BC} = \overline{DE} = a \end{cases}$$

si determinino:

1. le coordinate (X_G, Y_G) del *baricentro* della lamina;
2. La *matrice di inerzia* della lamina rispetto al polo O ed al sistema di assi $\{X, Y\}$.

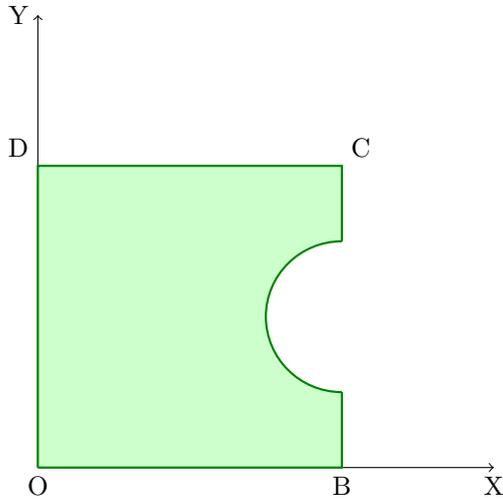
Soluzione :

1. $\left(0, \frac{13}{14}a\right)$

2.

$$I_O = \begin{pmatrix} \frac{25}{21}Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{91}{84}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{191}{84}Ma^2 \end{pmatrix}$$

Problema 1 La lamina omogenea di massa M rappresentata in figura è ottenuta da una lamina quadrata $OBCD$ operando un foro semicircolare di raggio $R = \frac{\overline{OB}}{4}$ e centro nel punto medio del lato BC .



Supponendo:

$$\left\{ \overline{OB} = 2a \right.$$

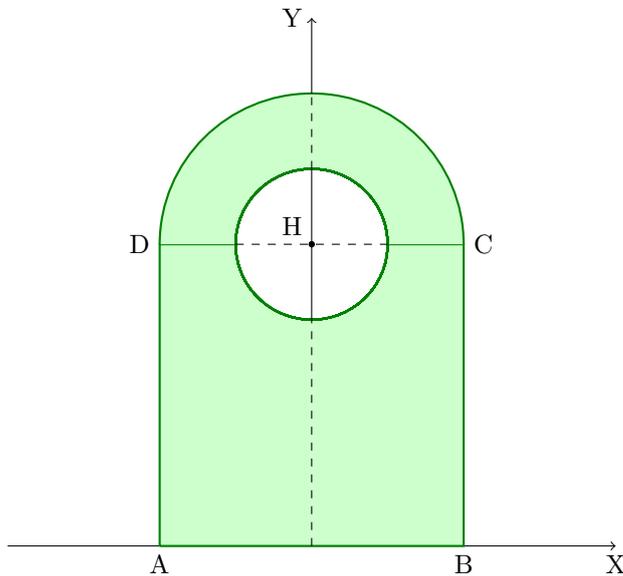
si determinino:

1. le coordinate (X_G, Y_G) del *baricentro* della lamina;
2. gli elementi $(I_O)_{11}$ e $(I_O)_{12}$ della *matrice di inerzia* della lamina rispetto al polo O ed al sistema di assi $\{X, Y\}$.

Soluzione :

1. $\left(\frac{2a(49-3\pi)}{96-3\pi}, a \right)$
2. $(I_O)_{11} = \left(\frac{128}{3} - \frac{17\pi}{16} \right) \frac{Ma^2}{32-\pi}$, $(I_O)_{12} = - \left(\frac{98}{3} + 2\pi \right) \frac{Ma^2}{32-\pi}$,

Problema 1 La lamina omogenea di massa M rappresentata in figura è ottenuta saldando una lamina quadrata $ABCD$ con una lamina semicircolare di raggio $R_1 = \frac{\overline{DC}}{2}$ e centro nel punto medio del lato DC , e operando un foro circolare di raggio $R_2 = \frac{\overline{DC}}{4}$, sempre con centro nel punto medio del lato DC .



Supponendo:

$$\left\{ \overline{AB} = 2a \right.$$

si determinino:

1. le coordinate (x_G, y_G) del *baricentro* della lamina;
2. la *matrice di inerzia* $(I_H)_{ij}$ della lamina rispetto al polo H ed al sistema di assi $\{X, Y\}$.
3. l'elemento $(I_G)_{11}$

Soluzione :

1. $\left(0, \frac{2(28+3\pi)a}{3(16+\pi)} \right)$
- 2.

$$I_H = \frac{M}{16 + \pi} \begin{pmatrix} \frac{64}{3} + \frac{7\pi}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} + \frac{7\pi}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{80}{3} + \frac{7\pi}{8} \end{pmatrix}$$

$$3. (I_G)_{11} = \frac{M}{16+\pi} \left(\frac{64}{3} + \frac{7\pi}{16} \right) - M \left[2a - \frac{2(10+3\pi)a}{3(16+\pi)} \right]^2$$