

Analisi matematica 2B –
Esame scritto – 21 gennaio 2010

COGNOME _____ NOME _____

N.B. Ogni affermazione va adeguatamente motivata.

Esercizio 1. Dato il problema differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = xe^{x^2-y(x)} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- a) Studiare al variare di y_0 esistenza ed unicità della soluzione.
b) Sia $y_0 = 0$. Tracciare il grafico della soluzione in un intorno del punto iniziale e calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x)}{(e^x - 1)^2}$$

- c) Sia $y_0 = 0$. Trovare la soluzione e calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x^2}$$

Analisi matematica 2B –
Esame scritto – 21 gennaio 2010

COGNOME _____ NOME _____

Esercizio 2. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{\sqrt{1-x}} + bx \ln|x| & x < 1 \\ c & x = 1 \\ e^{-\frac{1}{x-1}} & x > 1 \end{cases}$$

- a) Per quali $a, b, c \in \mathbf{R}$ la funzione risulta integrabile, eventualmente in senso improprio, in $[-1, 2]$?
b) Per quali $a, b, c \in \mathbf{R}$ la funzione ha primitive in $[-1, \frac{1}{2}]$?
c) Sia $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$. Calcolare.

$$\int_0^1 f(x) dx$$

Analisi matematica 2B –
Esame scritto – 21 gennaio 2010

COGNOME _____ NOME _____

Esercizio 3. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x, y) = \frac{x}{y - \sqrt{|y - x|}}$$

- a) Determinare e disegnare il dominio della funzione.
- b) Calcolare, se esiste, $\frac{\partial f}{\partial Q}(P)$ al variare del vettore Q essendo $P(1, 1)$.
- c) Determinare $a, b, c \in \mathbf{R}$ tali che: la funzione

$$g(x, y) = \frac{f(x, y) + ax + by + c}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}}$$

sia infinitesima nel punto $(1, 0)$.

- d) Calcolare l'area della regione del piano definita dalle curve di livello 1 e contenuta nel cerchio centrato in $(0, 0)$ e di raggio 1.