MATEMATICA.

Sistemi lineari in due equazioni due incognite.

Date due equazioni lineari nelle due incognite x, y come ad esempio

$$\begin{cases} 2\,x = 12 - y \\ 3\,y + 8 - x = 0\ , \end{cases}$$

si pone il problema di trovare, se esistono, un numero x ed un numero y che risolvano entrambe le equazioni.

In generale dato il *sistema lineare di due equazioni nelle due incognite* x, y

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0\ , \end{cases}$$

risolvere il sistema significa determinare l'insieme S delle coppie (x, y) di numeri che verificano entambe le equazioni, tali coppie (x, y) si dicono *soluzioni* del sistema.

Detti S_1 ed S_2 gli insiemi delle soluzioni, rispettivamente, della prima e della seconda equazione si ha $S = S_1 \cap S_2$.

- *Se $S \neq \emptyset$, il sistema si dice risolubile* e si possono presentare i seguenti casi:

a) S è costituito da un solo elemento, cioè il sistema ha una sola soluzione. In tal caso il sistema si dice determinato.

b) S è infinito, cioè il sistema ha infinite soluzioni. In tal caso il sistema si dice indeterminato.

- *Se $S = \emptyset$, il sistema si dice impossibile.*

Osservazione 1. Una singola equazione lineare in due incognite ammette sempre infinite soluzioni. Infatti nell'equazione $a\,x + b\,y + c = 0$ con $a, b \neq 0$ per ogni numero x fissato esiste una (ed una sola) soluzione y dell'equazione. Esisteranno così infinite coppie (x, y) che risolvono l'equazione; sappiamo che nel piano cartesiano tali coppie sono le coordinate di tutti e soli i punti di una retta.

Due sistemi lineari si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni.

Vogliamo imparare a costruire sistemi equivalenti usando l'operazione di *combinazione lineare.*

Si dice *combinazione lineare* delle due equazioni lineari in due incognite

$$a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0$$

$$a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0$$

l'equazione lineare in due incognite

$$h\,(a_1\,x + b_1\,y + c_1) + k(a_2\,x + b_2\,y + c_2) = 0$$

con h, k numeri non simultaneamente nulli.

Osservazione 2. Se $(\bar{x}, \bar{y})$ è una soluzione comune alle due equazioni, essa sarà soluzione anche dell'equazione combinazione lineare.

Dato un sistema lineare di due equazioni in due incognite, diremo *sistema combinazione lineare* del sistema dato, un sistema formato da due combinazioni lineari delle due equazioni del sistema.

In altri termini dato il sistema

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \end{cases}$$

il sistema

$$(*)\begin{cases} h_1\,(a_1\,x + b_1\,y + c_1) + k_1(a_2\,x + b_2\,y + c_2) = 0 \\ h_2\,(a_1\,x + b_1\,y + c_1) + k_2(a_2\,x + b_2\,y + c_2) = 0 \end{cases}$$

con h_1, k_1 non simultaneamente nulli ed h_2, k_2 non simultaneamente nulli è un sistema combinazione lineare del sistema dato.

Si prova che se i numeri h_1, k_1, h_2, k_2 sono scelti convenientemente si ottiene in tal modo un sistema equivalente al sistema iniziale e magari di più semplice risoluzione. Precisamente si puo' dimostrare che:

Se $h_1\,k_2 - k_1\,h_2 \neq 0$ **il sistema combinazione lineare è equivalente al sistema dato.**

Vediamo nell'esempio seguente come con opportune combinazioni lineari si ottiene un sistema equivalente a uno dato, ma immediato da risolvere.

Esempio.

Riprendendo l'esempio di partenza

$$\begin{cases} 2\,x = 12 - y \\ 3\,y + 8 - x = 0 \end{cases}$$

riscriviamolo in forma normale

$$\begin{cases} 2\,x + y - 12 = 0 \\ -x + 3\,y + 8 = 0 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima equazione per 1 e la seconda per 2, sommando membro a membro si ottiene

$$7\,y + 4 = 0$$

Moltiplichiamo la prima equazione per -3 e la seconda per 1, sommando membro a membro si ottiene

$$-7\,x + 44 = 0$$

Il sistema combinazione è

$$\begin{cases} 7\,y + 4 = 0 \\ -7\,x + 44 = 0 \end{cases}$$

e la sua risoluzione è immediata poiché la prima equazione contiene solo l'incognita y e la seconda solo l'incognita x.

La soluzione è

$$x = \frac{44}{7} \quad , \quad y = -\frac{4}{7}\ .$$

Quesiti.

1) La proposizione: "**Se** $S = \emptyset$**, il sistema si dice impossibile**",

A) è una definizione.
B) è un teorema.
C) è un assioma.
D) Preferisco non rispondere.

2) La proposizione: "**Se** $h_1 \, k_2 - k_1 \, h_2 \neq 0$ **il sistema combinazione lineare è equivalente al sistema dato**",

A) è una definizione.
B) è un teorema.
C) è un assioma.
D) Preferisco non rispondere.

3) Il sistema $(*)$ di pag. 2 , combinazione lineare di un sistema dato, ottenuto con coefficienti $h_1 = 0,\ h_2 = 0$,

A) è indeterminato qualunque sia il sistema dato e qualunque siano $k_1,\ k_2$.
B) è equivalente al sistema dato qualunque siano $k_1,\ k_2$.
C) è indeterminato solo se $k_1 = 1,\ k_2 = 1$.
D) Preferisco non rispondere.

4) Il sistema

$$\begin{cases} 2\,x + 3\,y = 1 \\ 4\,x + 6\,y = 2 \end{cases}$$

è indeterminato perché:

A) almeno una coppia (x, y) di numeri è soluzione, ad esempio $x = 2,\ y = -1$.
B) qualunque coppia di numeri è soluzione.
C) ha infinite soluzioni.
D) Preferisco non rispondere.

5) L'affermazione **"Una singola equazione lineare in due incognite ammette sempre infinite soluzioni"**,

A) è illustrata con un esempio nella "**Osservazione 1**".
B) è solo enunciata nella "**Osservazione 1**".
C) è dimostrata nella "**Osservazione 1**".
D) Preferisco non rispondere.

6) È dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \ , \end{cases}$$

con a_1, b_1 non tutti due nulli e lo stesso per a_2, b_2; interpretiamo l'insieme delle sue soluzioni nel piano cartesiano come intersezione delle due rette di equazioni

$$a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \quad , \quad a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \ .$$

Se il sistema ha due soluzioni distinte

A) è determinato, ossia le rette sono incidenti.
B) è indeterminato, ossia le rette sono coincidenti.
C) è impossibile, ossia le rette sono parallele e distinte.
D) Preferisco non rispondere.

7) Il sistema

$$\begin{cases} (x-y)^2 - x^2 = y^2 - 2\,x\,y \\ 3\,x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

A) è equivalente ad un sistema lineare indeterminato.
B) è lineare determinato.
C) non è equivalente ad un sistema lineare.
D) Preferisco non rispondere.

8) Un'equazione combinazione lineare delle due equazioni lineari

$$a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \quad , \quad a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \ ,$$

A) ha solo la soluzione comune alle due equazioni.
B) ha sempre infinite soluzioni.
C) può avere solo soluzioni dell'una o dell'altra equazione.
D) Preferisco non rispondere.

9) Considera il seguente problema: "Alberto è di cinque anni più grande di Massimo. La somma del doppio degli anni di Alberto e di quelli di Massimo è 53. Determinare l'età di Massimo e quella di Alberto."
Considerati i sistemi:

$$(1)\ \begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ 2\,x + y - 53 = 0 \end{cases} \quad , \quad (2)\ \ 2\,x + y - 53 = 0 \quad , \quad (3)\ \begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x + 2\,y - 53 = 0 \end{cases} \quad ,$$

questo problema può essere risolto tramite:

A) (1) .
B) (2) .
C) (3) .
D) Preferisco non rispondere.

10) Indicare quale dei seguenti sistemi si risolve graficamente usando la figura sotto riportata:

A) $\begin{cases} 5x - 3\,y = 2 \\ 2\,x - 3\,y = -1 \end{cases}$.

B) $\begin{cases} 2\,x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

C) $\begin{cases} 3\,x - 2\,y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

D) Preferisco non rispondere.