

Sistemi lineari in due equazioni due incognite.

Date due equazioni lineari nelle due incognite x, y come ad esempio

$$\begin{cases} 2x = 12 - y \\ 3y + 8 - x = 0, \end{cases}$$

si pone il problema di trovare, se esistono, un numero x ed un numero y che risolvano entrambe le equazioni.

In generale dato il *sistema lineare di due equazioni nelle due incognite x, y*

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \end{cases}$$

risolvere il sistema significa determinare l'insieme S delle coppie (x, y) di numeri che verificano entrambe le equazioni, tali coppie (x, y) si dicono *soluzioni* del sistema.

Detti S_1 ed S_2 gli insiemi delle soluzioni, rispettivamente, della prima e della seconda equazione si ha $S = S_1 \cap S_2$.

- Se $S \neq \emptyset$, il sistema si dice *risolubile* e si possono presentare i seguenti casi:
 - a) S è costituito da un solo elemento, cioè il sistema ha una sola soluzione. In tal caso il sistema si dice *determinato*.
 - b) S è infinito, cioè il sistema ha infinite soluzioni. In tal caso il sistema si dice *indeterminato*.
- Se $S = \emptyset$, il sistema si dice *impossibile*.

Osservazione 1. Una singola equazione lineare in due incognite ammette sempre infinite soluzioni. Infatti nell'equazione $ax + by + c = 0$ con $a, b \neq 0$ per ogni numero x fissato esiste una (ed una sola) soluzione y dell'equazione. Esisteranno così infinite coppie (x, y) che risolvono l'equazione; sappiamo che nel piano cartesiano tali coppie sono le coordinate di tutti e soli i punti di una retta.

Due sistemi lineari si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni.

Vogliamo imparare a costruire sistemi equivalenti usando l'operazione di *combinazione lineare*.

Si dice *combinazione lineare* delle due equazioni lineari in due incognite

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

l'equazione lineare in due incognite

$$h(a_1 x + b_1 y + c_1) + k(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

con h, k numeri non simultaneamente nulli.

Osservazione 2. Se (\bar{x}, \bar{y}) è una soluzione comune alle due equazioni, essa sarà soluzione anche dell'equazione *combinazione lineare*.

Dato un sistema lineare di due equazioni in due incognite, diremo *sistema combinazione lineare* del sistema dato, un sistema formato da due combinazioni lineari delle due equazioni del sistema.

In altri termini dato il sistema

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

il sistema

$$(*) \begin{cases} h_1 (a_1 x + b_1 y + c_1) + k_1 (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0 \\ h_2 (a_1 x + b_1 y + c_1) + k_2 (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0 \end{cases}$$

con h_1, k_1 non simultaneamente nulli ed h_2, k_2 non simultaneamente nulli è un sistema combinazione lineare del sistema dato.

Si prova che se i numeri h_1, k_1, h_2, k_2 sono scelti convenientemente si ottiene in tal modo un sistema equivalente al sistema iniziale e magari di più semplice risoluzione. Precisamente si può dimostrare che:

Se $h_1 k_2 - k_1 h_2 \neq 0$ il sistema combinazione lineare è equivalente al sistema dato.

Vediamo nell'esempio seguente come con opportune combinazioni lineari si ottiene un sistema equivalente a uno dato, ma immediato da risolvere.

Esempio.

Riprendendo l'esempio di partenza

$$\begin{cases} 2x = 12 - y \\ 3y + 8 - x = 0 \end{cases}$$

riscriviamolo in forma normale

$$\begin{cases} 2x + y - 12 = 0 \\ -x + 3y + 8 = 0 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima equazione per 1 e la seconda per 2, sommando membro a membro si ottiene

$$7y + 4 = 0$$

Moltiplichiamo la prima equazione per -3 e la seconda per 1, sommando membro a membro si ottiene

$$-7x + 44 = 0$$

Il sistema combinazione è

$$\begin{cases} 7y + 4 = 0 \\ -7x + 44 = 0 \end{cases}$$

e la sua risoluzione è immediata poiché la prima equazione contiene solo l'incognita y e la seconda solo l'incognita x .

La soluzione è

$$x = \frac{44}{7} \quad , \quad y = -\frac{4}{7} .$$

Quesiti.

- 1) La proposizione: "Se $S = \emptyset$, il sistema si dice impossibile",
- A) è una definizione.
 - B) è un teorema.
 - C) è un assioma.
 - D) Preferisco non rispondere.
- 2) La proposizione: "Se $h_1 k_2 - k_1 h_2 \neq 0$ il sistema combinazione lineare è equivalente al sistema dato",
- A) è una definizione.
 - B) è un teorema.
 - C) è un assioma.
 - D) Preferisco non rispondere.
- 3) Il sistema (*) di pag. 2 , combinazione lineare di un sistema dato, ottenuto con coefficienti $h_1 = 0$, $h_2 = 0$,
- A) è indeterminato qualunque sia il sistema dato e qualunque siano k_1 , k_2 .
 - B) è equivalente al sistema dato qualunque siano k_1 , k_2 .
 - C) è indeterminato solo se $k_1 = 1$, $k_2 = 1$.
 - D) Preferisco non rispondere.
- 4) Il sistema
- $$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$$
- è indeterminato perché:
- A) almeno una coppia (x, y) di numeri è soluzione, ad esempio $x = 2$, $y = -1$.
 - B) qualunque coppia di numeri è soluzione.
 - C) ha infinite soluzioni.
 - D) Preferisco non rispondere.
- 5) L'affermazione "Una singola equazione lineare in due incognite ammette sempre infinite soluzioni",
- A) è illustrata con un esempio nella "Osservazione 1".
 - B) è solo enunciata nella "Osservazione 1".
 - C) è dimostrata nella "Osservazione 1".
 - D) Preferisco non rispondere.

6) È dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases},$$

con a_1, b_1 non tutti due nulli e lo stesso per a_2, b_2 ; interpretiamo l'insieme delle sue soluzioni nel piano cartesiano come intersezione delle due rette di equazioni

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad , \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 .$$

Se il sistema ha due soluzioni distinte

- A) è determinato, ossia le rette sono incidenti.
- B) è indeterminato, ossia le rette sono coincidenti.
- C) è impossibile, ossia le rette sono parallele e distinte.
- D) Preferisco non rispondere.

7) Il sistema

$$\begin{cases} (x - y)^2 - x^2 = y^2 - 2xy \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

- A) è equivalente ad un sistema lineare indeterminato.
- B) è lineare determinato.
- C) non è equivalente ad un sistema lineare.
- D) Preferisco non rispondere.

8) Un'equazione combinazione lineare delle due equazioni lineari

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad , \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \quad ,$$

- A) ha solo la soluzione comune alle due equazioni.
- B) ha sempre infinite soluzioni.
- C) può avere solo soluzioni dell'una o dell'altra equazione.
- D) Preferisco non rispondere.

9) Considera il seguente problema: "Alberto è di cinque anni più grande di Massimo. La somma del doppio degli anni di Alberto e di quelli di Massimo è 53. Determinare l'età di Massimo e quella di Alberto."

Considerati i sistemi:

$$(1) \begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ 2x + y - 53 = 0 \end{cases} \quad , \quad (2) \quad 2x + y - 53 = 0 \quad , \quad (3) \begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x + 2y - 53 = 0 \end{cases} \quad ,$$

questo problema può essere risolto tramite:

- A) (1) .
- B) (2) .
- C) (3) .
- D) Preferisco non rispondere.

10) Indicare quale dei seguenti sistemi si risolve graficamente usando la figura sotto riportata:

A) $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

D) Preferisco non rispondere.

