Esercizi proposti di goniometria

1. Un settore circolare, in un cerchio di raggio 14 cm, ha area uguale a $42\pi\ cm^2$. Determina la misura in gradi, primi e secondi dell'angolo al centro corrispondente.

2. Determina i valori delle funzioni trigonometriche seno e coseno di un angolo ottuso α sapendo che $\tan\alpha = -\sqrt{15}$.

3. In un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali e monometrico xOy scrivi l'equazione della retta passante per il punto $P(-2;0)$ che forma con l'asse delle ascisse un angolo acuto α tale che $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

4. Stabilire se le seguenti funzioni (della variabile reale x e definite nel piú ampio insieme possibile) sono pari o dispari:

a) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \cos x$

b) $y = x + \cos x$

c) $y = x + \tan x$

5. Data la funzione definita in tutto l'asse reale :
$f(x) = \sin(\pi - x)\cos(x + 2\pi) + \tan(x + \pi)$ calcola: $f(\dfrac{5\pi}{3})$; $f(\dfrac{3\pi}{4})$; $f(\dfrac{7\pi}{6})$

6. Determina quali condizioni devono soddisfare i parmetri reali a, b, c in modo tale che la funzione:

$$f(x) = a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x$$

1) sia pari

2) sia dispari

7. Risolvi le seguenti equazioni:

a) $|\sin^2 x - \sin x \cos x| = |\cos^2 x - 1|$

b) $(\frac{1}{\sin x} - 1)\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{1 - \sin x}$

8. Risolvi il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sin(x - y) = -1 \\ \\ \cos(x - y) = -1 \end{cases}$$

9. Determina il dominio e gli eventuali zeri della seguente funzione:

$$y = \frac{\sin x - \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2}$$

10. Date le due funzioni:

$$f(x) = |2 \tan x - 1|$$

e

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

determina il dominio e gli eventuali zeri di ciascuna.

11. Determina per quali valori del parametro reale k il dominio della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{k - \sin x \cos x}$$

é tutto $\mathbf{R}$

12. Considera la funzione:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x + \sin x}$$

Uno solo dei seguenti insiemi rappresenta il suo dominio. Individua quale dandone una esauriente motivazione:

a) $[0, +\infty)$

b) $(0, +\infty)$

c) $\mathbf{R} - \{0\}$

d) $\mathbf{R}$

13. Determina per quali valori del parametro reale k la funzione

$$y = \frac{1}{\sin x + \cos x - k}$$

ha come dominio tutto l'asse reale

14. Verifica la seguente identitá, dopo averne individuato le condizioni di esistenza:

$$\ln|\sin\alpha| = \frac{1}{2}\ln|1 - 2\cos\alpha| - \ln\sqrt{2}$$

15. Risolvi la seguente equazione:

$$4^{\tan x} - 2^{\tan x - 1} = 2^{\tan x} - \frac{1}{2}$$

16. Determina per quali valori del parametro reale k l'equazione:

$$\sin^2 x + k\sin x\cos x = 2$$

ammette tra le sue soluzioni $x = \frac{\pi}{4}$

Determina quindi tutte le soluzioni dell'equazione in corrispondenza di mquel valore di k trovato.

17. In un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali e monometrico xOy si consideri la circonferenza di equazione:

$$x^2 + y^2 - 2(\sin^2\alpha - \cos\alpha - 1)x - 2(\sin\alpha - \cos\alpha)y - 1 = 0$$

Determina per quali valori di α:

a) ha il centro sull'asse x

b) ha il centro sull'asse y

18. Risolvi le seguenti disequazioni:

a) $2\cos^2\dfrac{x}{2} \geq 3\cos^x + 1 + \sqrt{2}$

b) $\sin x - 2\cos x - 1 < 0$

19. In un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali e monometrico xOy determina nell'intervallo $[0; 2\pi]$ le coordinate degli eventuali punti di intersezione dei grafici delle funzioni $f(x) = 3\tan x$ e $g(x) = -2\cos x$. Infine trova i valori $x \in [0; 2\pi]$ tale che: $f(x) \leq g(x)$.

20. Determina per quali valori del parametro reale k la disequazione:

$$\sin x \cos x \geq k$$

risulta verificata per ogni valore di $x \in \mathbf{R}$.

21. Determina il dominio delle seguenti funzioni:

a) $y = (\tan x)\sqrt{1 - \cos x}$

b) $y = \cos x - \sqrt{4\sin^2 x - 1}$

c) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos(\pi - x)}$

22. Indica per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ l'equazione: $\sin x - \cos x = k$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$.

23. Determina per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ la disequazione $\sin x \cos x \geq k$ risulta verificata per ogni valore di $x \in \mathbf{R}$.

24. Traccia i grafici delle funzioni $y = 3\tan x$ e $y = -2\cos x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ e determina le coordinate dei loro punti di intersezione. Deduci graficamente le soluzioni della disequazione $3\tan x \leq -2\cos x$ nell'intervallo indicato.

25. Risolvi la disequazione $2\cos^2 \frac{x}{2} \geq 3\cos x + 1 + \sqrt{3}$

26. Fornisci un esempio

a) di una disequazione della forma $\sin x \geq m$ che non sia verificata per alcun valore di x

b) di una disequazione della forma $\cos x \leq m$ che sia soddisfatta se e solo se $x = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

c) di una disequazione della forma $\tan x < m$ che ha tra le sue soluzioni $x = \frac{\pi}{3}$

27. Determina per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il dominio della funzione
$y = \frac{\sqrt{\pi x - 3x^2}}{k - \sin x}$ é $[0, \frac{\pi}{3}]$.

28. Risolvi

a) $\frac{\tan x}{2\sin x + 1} \geq 0$ in $[0, 2\pi]$

b) $|\sin x + \cos x| \leq 1$

SOLUZIONI

1) $77^o 8' 34''$

2) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4} \quad \cos\alpha = -\dfrac{1}{4}$

3) $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{8}{3}$

4) a) pari; b) non pari e non dispari; c) dispari

5) a) $= -\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$; b) $= -\dfrac{3}{2}$; c) $= \dfrac{7\sqrt{3}}{12}$

6) a) $b = 0$; b) $a = c = 0$

7) $S_1 = \{k\dfrac{\pi}{2};\ \arctan\dfrac{1}{2} + k\pi\}$; $S_2 = \{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

8) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi + k_1\pi,\ y = \dfrac{3\pi}{4} - k\pi + k_1\pi$

9) dominio: $\mathbf{R} - \{\pm\frac{\pi}{4} + k\pi\}$; zeri: $\{\pi + 2k\pi\} \bigcup \{\frac{\pi}{3} + 4k\pi\} \bigcup \{\frac{5\pi}{3} + 4k\pi\}$

10) dom f $=\mathbf{R} - \{\pm\frac{\pi}{4} + k\pi\}$; zeri f $= \{k\pi\} \bigcup \{\frac{\pi}{4} + k\pi\}$;
dom g $= \mathbf{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \bigcup \{\frac{\pi}{4} + k\pi\}$; zeri g $=\emptyset$

11) $k < -\frac{1}{2}$ o $k > \frac{1}{2}$

12) b)

13) $k < -\sqrt{2}$ o $k > \sqrt{2}$

14) $\alpha \neq k\pi$

15) $S = \{k\pi;\ -\frac{\pi}{4} + k\pi\}$

16) $k = 3$; $S = \{\frac{\pi}{4} + k\pi;\ \arctan 2 + k\pi\}$

17) a) $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$; b) $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ oppure $\alpha = \pi + 2k\pi$

18) a) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ b) $2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oppure $\pi + \arcsin\frac{3}{5} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$

19) $A(\dfrac{7\pi}{6}, \sqrt{3}) \quad B(\dfrac{11\pi}{6}; -\sqrt{3})$ $\dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{7\pi}{6}$ oppure $\dfrac{3\pi}{2} < x \leq \dfrac{11\pi}{6}$

20) $k \leq -\frac{1}{2}$

21) a) $\mathbf{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ b) $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad k \in \mathbf{Z}\}$
c) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbf{Z}\}$

22) 1 soluzione per $0 \leq k < 1$; 2 soluzioni per $1 \leq k \leq \sqrt{2}$

23) $k \leq -\frac{1}{2}$

24) $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{6}$ oppure $\frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{11\pi}{6}$

25) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbf{Z}$

27) $k < 0$ oppure $k > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

28) a) $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ oppure $\pi \leq x < \dfrac{7\pi}{6}$ oppure $\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{11\pi}{6}$
b) $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$ oppure $\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.