

COGNOME _____ NOME _____

N.B. Ogni affermazione va adeguatamente motivata.

Esercizio 1

Si consideri l'equazione differenziale:

$$y'''(x) + ky''(x) + y'(x) + 2y(x) = f(x)$$

- a) Sia $f(x) = 0$. Per quali valori del parametro reale k la funzione $y(x) = e^{2x}$ é soluzione?
- b) Sia $k = 0$ e sia $f(x) = e^{-x}$. Trovare tutte le soluzioni limitate in $(-\infty, 0]$.
- c) Sia $k = -4$ e sia $f(x) = 0$. Dimostrare che l'insieme delle soluzioni infinitesime per $x \rightarrow -\infty$ costituisce uno spazio vettoriale di cui si chiede di trovare gli elementi di una base.

COGNOME _____ NOME _____

N.B. Ogni affermazione va adeguatamente motivata.

Esercizio 2 Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \frac{e^{\sqrt{x-y}} - 1}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

- a) Per quali valori positivi del parametro reale α la funzione risulta essere prolungabile per differenziabilità in $(0, 0)$?
- b) Sia $\alpha = 1$ e sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1; 0 \leq y \leq x; x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$. Determinare, se esistono, il minimo e il massimo globale della funzione in A .
- c) Sia $\alpha = 1$ e sia $P(1, 0)$. Calcolare, se esiste, la derivata direzionale minima della funzione in P .

COGNOME _____ NOME _____

N.B. Ogni affermazione va adeguatamente motivata.

Esercizio 3 Si consideri la funzione:

$$f(x) = \int_1^x \frac{\arctan t - t - t\sqrt[3]{t}}{\pi - 2 \arcsin \frac{1}{1+t^2}} dt$$

- a) Determinare il dominio di f .
- b) Calcolare i limiti agli estremi del dominio.
- c) Determinare l'insieme di derivabilità e la monotonia.
- d) Studiare la convergenza di $\int_0^1 |f'(x)|^\alpha dx$ al variare del parametro reale e positivo α .