Analisi matematica 2

Esame scritto – 7 dicembre 2010

COGNOME ________________________ NOME _____________________________

N.B. Ogni affermazione va adeguatamente motivata.

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1) Trovare un intorno di $x_0 = 0$ e un polinomio di terzo grado che approssimi in tale intorno la funzione a meno di $\frac{1}{1000}$.

2) Si tracci il grafico della funzione :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$$

3) Stabilire se la funzione F risulta invertibile in $[\frac{1}{2}; +\infty)$ e se esiste $(F^{-1})'(0)$.

Analisi matematica 2

Esame scritto – 7 dicembre 2010

COGNOME ________________________ NOME _____________________________

Esercizio 2. Si considerino la seguente funzione:

$$b(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\sin y} & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$

e il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y'(x) = b(y(x))e^{x^3} \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

1) Studiare esistenza ed unicitá della soluzione al variare dei parametri reali α e β.

2) Siano $\alpha = \beta = 0$. Tracciare il grafico della soluzione in un intorno del punto iniziale.

3) Siano $\alpha = \beta = 0$. Determinare, se esiste, il polinomio di secondo ordine di Mac Laurin della soluzione.

4) Siano $\alpha = \beta = 0$. Studiare la concergenza del seguente integrale:

$$\int_0^\delta \frac{1}{|y(x)|^k}\, dx$$

essendo $[0, \delta]$ l'intorno in cui esiste la soluzione $y(x)$ e k un parametro reale.

Analisi matematica 2

Esame scritto – 7 dicembre 2010

COGNOME ________________________ NOME _____________________________

Esercizio 3. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(x) + 6y'(x) + ky(x) = f(x)$$

1) Sia $f(x) = 0$. Trovare, se esiste, $k \in \mathbf{R}$ tale che $y(x) = e^x$ sia tra le soluzione dell'equazione.

2) Siano $f(x) = e^{-x}$ e $k = -7$. Trovare tutte le soluzioni limitate in $(0, +\infty)$.

3) Siano $f(x) = e^{-x}$ e $k = -7$. Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ tali che:

$$\int_0^{+\infty} y(x)\, dx = 0$$