

COGNOME _____ NOME _____

N.B. Ogni affermazione va adeguatamente motivata.

Esercizio 1. . Sia C il cono descritto dalla disuguaglianza $x^2 + y^2 \leq (z - 2)^2$. Calcolare le coordinate del baricentro del solido (supposto omogeneo)

$$T := C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y, 0 \leq z \leq 1\}$$

COGNOME _____ NOME _____

N.B. Ogni affermazione va adeguatamente motivata.

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + ky_2(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) + y_2(x) + 1 \\ y_1(0) = y_2(0) = 0 \end{cases}$$

- a) [p.ti 4] Per quali $k \in \mathbb{R}$ la prima componente della soluzione ha in $x_0 = 0$ un punto di minimo locale?
- b) [p.ti 3] Sia $k = 1$. Determinare esplicitamente la soluzione.
- c) [p.ti 3] Siano $k = 1$ e $\gamma(t) = (t, 1 - t)$ con $t \in [0, 1]$. Calcolare il seguente integrale curvilineo: $\int_{\gamma} f(x, y) \, ds$ essendo $f(x, y) = y_1(x) + y_2(y)$ e (y_1, y_2) la soluzione del problema differenziale del punto precedente.

COGNOME _____ NOME _____

N.B. Ogni affermazione va adeguatamente motivata.

Esercizio 3. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x, y) = \frac{x + y - \sin(x + y)}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

- a) [p.ti 3] Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ (se ne esistono) la funzione risulta prolungabile per continuità in tutto $\mathbb{R}^2$?
- b) [p.ti 3] Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione, prolungata come nel punto precedente, risulta differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$?
- a) [p.ti 4] Sia $\alpha = 0$ e sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$. Determinare, se esistono, il minimo e il massimo assoluti della funzione f in D .