

COGNOME _____ NOME _____

N.B. Giustificare ogni affermazione.

Esercizio 1. Sia T l'insieme

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq (z + 1)^2\}$$

Calcolare le coordinate del baricentro di T , supposto omogeneo.

COGNOME _____ NOME _____

N.B. Giustificare ogni affermazione.

Esercizio 2. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{|x| + |y|} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- 1) Studiare continuità e differenziabilità della funzione.
- 2) Calcolare, se esiste, la derivata direzionale della funzione in $(0, 0)$ lungo direzione e verso del vettore $v = (3/5, 4/5)$.
- 3) Calcolare il minimo e il massimo globale della funzione:

$$g(x, y) = (x + y)f(x, y)$$

in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x \leq 2; x^2 + y^2 \geq 1\}$

COGNOME _____ NOME _____

N.B. Giustificare ogni affermazione.

Esercizio 3. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x e^{x^2 + y^2(x)}}{y(x)}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- 1) Studiare esistenza ed unicità della soluzione.
- 2) Tracciare il grafico della soluzione in un intorno di $x_0 = 0$.
- 3) Trovare il dominio della soluzione e scriverne una espressione analitica esplicita.