

COGNOME _____ NOME _____

numero di matricola

--	--	--	--	--	--	--

N.B. Giustificare ogni affermazione.

Esercizio 1. Dato il problema differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = \ln \left(\frac{x - y(x)}{y(x)} \right) \\ y(1) = k \end{cases}$$

- a) Dimostrare che per ogni $k \in (0, 1)$ esiste un'unica soluzione locale.
- b) Sia $k = 1/2$. Tracciare il grafico locale della soluzione.

COGNOME _____ NOME _____

numero di matricola

--	--	--	--	--	--	--

N.B. Giustificare ogni affermazione.

Esercizio 2. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq 0 \\ k & (x, y) = 0 \end{cases}$$

a) Per quali valori reali del parametro k la funzione risulta differenziabile in tutto il dominio?

b) Sia $k = 0$. Stabilire se la funzione abbia un punto di minimo o massimo locale in $(0, 0)$.

c) Sia $k = 100$. Determinare i punti di minimo e massimo globale, se esistono, di f in

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

d) Sia $k = 100$. Calcolare il seguente integrale:

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy$$

$$\text{dove } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

COGNOME _____ NOME _____

numero di matricola

--	--	--	--	--	--	--

N.B. Giustificare ogni affermazione.

Esercizio 3. Sia

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 4y \leq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 - 4y + 3 \geq 0\}$$

Calcolare il volume di T e la coordinata z del baricentro di T (supposto omogeneo).