Analisi Matematica 2B
gennaio 2007

COGNOME......................NOME......................

Si risolvano i seguenti esercizi motivando adeguatamente ogni risposta:

Esercizio 1 Si considerino il seguente insieme:

$$A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \geq 1; \;\; 0 \leq y \leq x; \;\; y \leq 4 - x^2\}$$

e la seguente funzione:

$$f(x, y) = 1 + (x - 2y)^4$$

1. La funzione f è limitata nel suo dominio?
2. Trovare, se esistono, minimi e massimi locali della funzione nel suo dominio.
3. Trovare, se esistono, minimi e massimi globali della funzione f nell'insieme A.

COGNOME.....................NOME.....................

Esercizio 2 Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = x\ln(\frac{x+1}{x}) - e^{\frac{-k}{x}}$$

e

$$g(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\, dt$$

1. Determinare il dominio di g al variare di $k \in R$
2. Sia $k = \frac{1}{2}$. Determinare l'insieme di derivabilità di g.
3. Sia $k = \frac{1}{2}$. Calcolare $g(9)$ a meno di 10^{-2}.
4. Sia $k = \frac{1}{2}$. Calcolare al variare di $a \in (0, +\infty)$ il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} x^a g(x).$$

COGNOME.....................NOME.....................

Esercizio 3 Si consideri il seguente problema differenziale:

$$y'(x) = (|y(x)| - 1)^2 \;\; x \sin(x^2) \qquad y(x_0) = y_0$$

1. Studiare al variare di x_0 e y_0 esistenza e unicità della soluzione.
2. Sia $x_0 = y_0 = 0$. Tracciare il grafico locale della soluzione. (Non è richiesto lo studio della convessità)
3. Sia $x_0 = y_0 = 0$. Determinare la soluzione precisandone l'insieme di definizione.