Analisi Matematica 2B
appello novembre 2009

Cognome....................................:Nome........................

GIUSTIFICARE OPPORTUNAMENTE OGNI RISPOSTA

Esercizio 1 Si consideri la seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y - \sin y}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Per quali $\alpha > 0$ esiste il gradiente di f in tutto il dominio?
b) Sia $\alpha = \frac{1}{2}$. Stabilire se la funzione é differenziabile in tutto il dominio.
c) Sia

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1;\ x^2 + y^2 \geq 4x - 3;\ 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x \leq 2\}$$

Determinare, se esistono, un minorante e un maggiorante del seguente integrale:

$$\iint_A f(x,y)\, dxdy$$

Cognome....................................:Nome........................

GIUSTIFICARE OPPORTUNAMENTE OGNI RISPOSTA

Esercizio 2 Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \int_2^{|x|} \frac{e^t - 1}{(e^t - e^{-t})^\alpha \sqrt{t^3 + t}} \; dt$$

a) Discutere il dominio della funzione al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

b) Sia $\alpha = 1$. Tracciare il grafico della funzione.

c) Sia $\alpha = 1$. Tracciare, in un intorno di $x_0 = 0$, il grafico della funzione F primitiva di f tale che $F(0) = 0$.

Cognome.................................:Nome......................

GIUSTIFICARE OPPORTUNAMENTE OGNI RISPOSTA

Esercizio 3 Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y''(x) + 2y'(x) + a = f(x)$$

dove:

$$f(x) = \int_0^{b\,x} e^{-t^2}\ dt$$

a) Per quali valori di a e b l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è uno spazio vettoriale?

b) Siano $a = 1$ e $b = 0$. Determinare l'integrale generale dell'equazione.

c) Siano $a = b = 1$. Esistono soluzioni che siano crescenti e convesse in un intorno di $x_0 = 0$?

d) Sia $a = 0$ e $b = -1$ e si consideri la soluzione dell'equazione differenziale tale che: $y(0) = y'(0) = 0$. Tracciare il grafico della soluzione in un intorno di $x_0 = 0$.