

Analisi Matematica II-edile

Quinta prova parziale a.a.2005-06

Cognome.....Nome.....

Esercizio 1 Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y_1'(x) = 5y_1(x) - y_2(x) + 1 \\ y_2'(x) = 3y_1(x) + y_2(x) + e^x \\ y_1(0) = y_2(0) = 0 \end{cases}$$

1. Scrivere un problema di Cauchy scalare nella sola incognita $y_1(x)$ equivalente al problema dato.
2. Trovare una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato.
3. Trovare la soluzione del problema dato.

Esercizio 2 Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$y'(x) = xy(x) - \sin y(x)$$

$$y(0) = \frac{\pi}{4}$$

1. Stabilire se, localmente, esiste ed è unica la soluzione.
2. Studiare esistenza e unicità globale della soluzione, determinandone il dominio.
3. Stabilire se l'eventuale soluzione possa annullarsi.

Esercizio 3 Si consideri il seguente campo vettoriale:

$$F(x, y) = \frac{1}{x - y^2} dx + \frac{ay + b}{x - y^2} dy.$$

1. Determinare il dominio, precisando se è connesso, convesso, semplicemente connesso.

2. Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ il campo è irrotazionale?

3. Per tali valori, se esistono, calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{\gamma} F$$

e

$$\int_{\xi} F$$

essendo γ il segmento di retta che unisce i punti $(0, 1)$ e $(2, 1)$ e ξ il segmento di retta che unisce i punti $(0, 1)$ e $(2, 5)$.