

Analisi Matematica II-edile

Quarta prova parziale a.a.2004-05

Cognome.....Nome.....

Esercizio 1 Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + ky_2(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) - ky_2(x) + x \end{cases}$$

1. Per quali $k \in R$ le soluzioni del sistema omogeneo associato sono periodiche?
2. Sia $k = 1$. Trovare tutte le soluzioni del sistema completo.
3. Sia $k = 1$. Trovare una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato.

4. Sia $k = 1$. Tracciare il grafico locale della prima componente della soluzione del sistema completo tale che $y_1(0) = y_2(0) = 2$

Esercizio 2 Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$y'(x) = \frac{x^2 e^{y(x)}}{x + y(x)}$$

$$y(0) = 1$$

1. Stabilire se esiste ed è unica la soluzione.

2. Trovare un intorno di $x_0 = 0$ in cui esiste ed è unica la soluzione.

3. Scrivere i primi 2 termini della successione delle approssimazioni successive.

4. Linearizzare l'equazione.

Esercizio 3 Si consideri il seguente campo vettoriale:

$$F(x, y) = \frac{1}{1 + (1 + x + y^2)^2} dx + \frac{ay}{1 + (1 + x + y^2)^2} dy.$$

1. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il campo è conservativo?

2. Per tali valori calcolare:

$$\int_{\gamma} F$$

essendo γ l'arco di parabola che unisce il vertice $O(0, 0)$ al punto $P(\frac{1}{2}; \frac{4}{3})$ nel verso da P verso O.