TEOREMA DI DE L'HOPITAL - FORMULA DI TAYLOR

INGEGNERIA NAVALE

Anno Accademico 2010/2011

1) Calcolare i seguenti limiti usando, eventualmente, il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen\ x}\right),\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{(x^2-1)^2}-\frac{1}{ln\ x}\right),\quad \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{tg\ x}},\quad \lim_{x\to}\frac{x-sen\ x}{x^3},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x-x}{arctg\ x^3},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x-1-ln\ x}{(x-1)^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2},\quad \lim_{x\to a}\frac{ln(e^x-e^a)}{ln(x-a)}.$$

2) Dire se e' vantaggioso calcolare i seguenti limiti usando il teorema di de l'Hopital :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+sen\ x}{x+cos\ x}\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{-x^2\ sen\frac{1}{x}}{sen\ x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+sen\ x\ cos\ x+1}{e^{sen\ x}(x+sen\ x\ cos\ x)}.$$

3) Determinare gli ordini di infinitesimo o di infinito (per $x\longrightarrow+\infty$) delle seguenti funzioni :

$$\sqrt[3]{x},\quad (\ 1+2\mathrm{x}\ )\sqrt{x},\quad x^2 arctg\ x,\quad x^{\frac{x}{x-1}},\quad \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1},\quad \frac{2x^3-1}{\sqrt{x^3+1}},$$
$$\sqrt{x+1}+cos\ x.$$

4) Determinare gli ordini di infinitesimo o di infinito (per $x\longrightarrow 0$) delle seguenti funzioni :

$$x-sen\ x,\quad e^x-1-x,\quad \frac{x}{x-tg\ x},\quad e^x-1-x-\frac{x^2}{2},\quad \sqrt[3]{e^x ln(1+x)},$$
$$(x-sen\ x)tg^2x,\quad \frac{1}{sen\ x+\sqrt{|x|}},\quad \sqrt{x^2-x^3}.$$

5) Determinare, mediante la formula di Taylor e al variare di $k\in\mathbb{R}$, gli ordini di infinitesimo (per $x\longrightarrow 0$) delle seguenti funzioni :

$$e^x+k\ e^{-x},\quad ln(1+x)-k\ arctg\ x+\frac{x^2}{2}.$$

6) Determinare, mediante la formula di Taylor e al variare di $k\in\mathbb{R}$, gli ordini di infinitesimo (per $x\longrightarrow+\infty$) delle seguenti funzioni :

$$e^{\frac{1}{x^2}}-1-\frac{k}{x^2},\quad \left(sen\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{3k}.$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

7) Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1 + \cos kx + \dfrac{x^2}{2}}{\operatorname{sen} \sqrt{x} + x^4}$.

8) Determinare gli ordini di infinitesimo o di infinito, se esistono, delle seguenti funzioni :

$\operatorname{sen} x - 1$ (per $x \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$), $\dfrac{1}{tg\,(x-a)}$ (per $x \longrightarrow a$).

9) Determinare gli ordini di infinitesimo o di infinito (per $x \longrightarrow 0$) delle seguenti funzioni :

$(e^x - \cos x)^2 + x^4$, $(x - tg\, x)^2 + \ln(1+x) - x^2$, $\dfrac{1}{\sqrt{x+1} - 1 - x}$.

10) Determinare un polinomio p tale che $f(x) = tg\ x - arctg\ x - p(x)$ sia infinitesima di ordine maggiore di 3 per $x \longrightarrow 0$.

11) Determinare $\delta > 0$ e un polinomio di secondo grado che approssimi $f(x) = e^x \operatorname{sen}^2 x$ a meno di 10^{-3} in $[0, \delta]$.

12) Sia $f(x) = e^x \cos x$; calcolare $f(0,4)$ a meno di 10^{-2}.

13) Determinare un polinomio che approssimi $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ a meno di 10^{-2} in $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$.

14) Calcolare : $tg\, \dfrac{3}{4}$ a meno di 10^{-4}, $\ln(1,2)$ a meno di 10^{-2}, $e^{0,002}$ a meno di 10^{-9}, $\sqrt{1,1}$ a meno di 10^{-3}.

PRIMITIVE - INTEGRALI

INGEGNERIA NAVALE - CHIMICA - ELETTRICA

Anno Accademico 2010/2011

1) Determinare i seguenti insiemi :

$$\int tg\, x\, dx, \quad \int x(x^2+1)^k\, dx \ \ (k \in \mathbb{N}), \quad \int \frac{sen\, \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{2-3x}\, dx}, \quad \int x e^{x^2}\, dx,$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx, \quad \int x^2 e^x\, dx, \quad \int x^2 cos\, x\, dx, \quad \int sen\, x\, cos\, x\, dx, \quad \int sen^2 x\, dx, \quad \int ln\, x\, dx,$$

$$\int \frac{x}{a^x}\, dx, \quad \int e^{-x} sen\, x\, dx, \quad \int \frac{ln(ln\, x)}{x}\, dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\, dx}, \quad \int \frac{1}{a^2-x^2}\, dx, \quad \int \frac{x^3+2}{x^2+2}\, dx,$$

$$\int \frac{1}{x^3-1}\, dx, \quad \int sen^2 x\, cos^2 x\, dx, \quad \int \frac{e^x-1}{e^{2x}+e^x+1}\, dx, \quad \int \frac{x}{1-x^4}\, dx, \quad \int x^3\sqrt{x^2+1}\, dx$$

$$\int \frac{2x}{(x+1)(x-2)(x+1)}\, dx, \quad \int \frac{sen(ln\, x)}{x}\, dx, \quad \int \frac{x^2-1}{x^2+4}\, dx, \quad \int \sqrt{3x+1}\, dx, \int x\sqrt{x+\frac{1}{4}}\, dx$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-ln^2 x}\, dx}, \quad \int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, dx, \quad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\, dx, \quad \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx, \quad \int \frac{x^3}{x^3-1}\, dx.$$

2) Calcolare i seguenti integrali definiti :

$$\int_0^x |2t^2-3|\, dt, \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sen\, x}{cos\, x}\, dx, \quad \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx, \quad \int_{-1}^1 (x+|x|)\, dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\, dx,$$

$$\int_2^3 \frac{x+3}{e^x}\, dx, \quad \int_1^{2\pi+1} sen^2(2x+2)\, dx, \quad \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+2x}}\, dx, \quad \int_0^1 e^x\sqrt{1-e^x}\, dx, \quad \int_1^2 \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}\, dx,$$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx, \quad \int_0^1 e^x cos\, e^x\, dx, \quad \int_3^4 arctg \frac{x}{1-x^2}\, dx.$$

3) Sia $f(x) = \begin{cases} arcsen\, x & |x| < 1 \\ kx & |x| \geq 1\, . \end{cases}$ Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$, f ha primitiva in $\mathbb{R}$ e determinarle tutte esplicitamente.

4) Calcolare una primitiva f di $g(x) = ln(1+x^2)$ tale che $f(3) = 0$.

5) Calcolare tutte le primitive di $g(x) = \dfrac{x\, ln\, |x|}{(x^2+1)^2}$ e di $h(x) = \dfrac{lnx}{x(1+8(ln\, x)^3)}$.

6) Sia $f(x) = \begin{cases} sen\, x & x \leq 0 \\ x + x^2 & 0 < x < 1 \\ 2e^{x-1} & x \geq 1\,. \end{cases}$

Determinare, se esistono, l'insieme delle primitive di f in $\mathbb{R}$.