calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$.

[log 2]

11.3 Dopo aver dimostrato per induzione la formula

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$.

[3/4]

11.4 Verificare che la serie seguente è divergente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{1/k}.$$

[É sufficiente osservare che $2^{1/n} \to 1$ per $n \to +\infty$]

11.5 Calcolare la somma delle seguenti serie geometriche

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k$ (d) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k$

[(a) 2; (b) 1; (c) $+\infty$; (d) 5]

11.6 Verificare che, per ogni $x \in (-1, 1)$, vale la formula

$$\sum_{k=n}^{+\infty} x^k = \frac{x^n}{1-x}.$$

[Basta osservare che $\sum_{k=n}^{+\infty} x^k = x^n + x^{n+1} + \ldots = x^n (1 + x + \ldots)$]

11.7 Determinare il carattere (convergente o divergente) delle seguenti serie armoniche generalizzate

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2}$

[(a) divergente; (b) convergente]

analogamente si verifica che

$$(114.7) \qquad t_{n+1} - t_n = \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^n t_1 \, .$$

La somma, o serie, degli intervalli di tempo è data da

$$(114.8) \qquad \begin{aligned} t_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (t_{k+1} - t_k) &= t_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k t_1 = \\ &= t_1 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k\right] = t_1 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k . \end{aligned}$$

Nell'ultimo membro compare la serie geometrica di ragione v_T/v_A, che è un numero positivo e minore di 1. A questo punto scopriamo l'errore del ragionamento di Zenone: *la somma degli infiniti intervalli di tempo non è infinita, ma è finita* e, in accordo con la (114.5), vale

$$(114.9) \qquad t_1 \frac{1}{1 - v_T / v_A} = \frac{t_1 \, v_A}{v_A - v_T} = \frac{d}{v_A - v_T} \, .$$

Quindi il punto A raggiunge il punto T nell'intervallo di tempo espresso in (114.9).

Si noti che il risultato trovato tramite il ragionamento di Zenone, utilizzando la somma di una serie geometrica convergente, è in accordo con la legge (114.1) del moto uniforme; infatti, dalla (114.1) si ricava che il tempo t in cui $s_A(t) = s_T(t)$ è appunto espresso dalla (114.9).

Esercizi

11.1 Verificare che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{k+1}{k}$ è divergente, dopo aver calcolato la somma s_n dei primi n termini.
[Si usi la relazione $\log (k+1)/k = \log(k+1) - \log k$. Si trova $s_n = \log(n+1)$]

11.2 Dopo aver dimostrato per induzione la formula

$$\sum_{k=1}^{n} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \log \frac{2(n+1)}{n+2} \, ,$$

11.8 Utilizzando il criterio del confronto, stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} k}{3^k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 - \cos k}{k^2}$

[(a) Si usi la disuguaglianza $1 + \operatorname{sen} k \leq 2$. La serie data è convergente; (b) convergente]

11.9 Utilizzando il criterio degli infinitesimi, stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 - k + 1}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k + 1}{(k + 1)^3}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \log k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k^3}\right)$ (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \operatorname{sen} \frac{1}{k}\right)$

[(a) convergente; (b) divergente; (c) convergente; (d) divergente; (e) convergente; (f) convergente]

11.10 Il criterio del rapporto non dà alcuna informazione se il risultato del limite (108.11) vale 1. Giustificare tale affermazione considerando la serie armonica generalizzata (107.11).
[Se $a_n = n^{-p}$, il limite (108.11) vale 1 qualunque sia p. Però la serie è convergente se $p > 1$, divergente se $p \leq 1$]

11.11 Utilizzando il criterio del rapporto, stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k / k$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\, 2^{-k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 1}{4^k}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{3^k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$ (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

...)]

seguenti serie

[(a) divergente; (b) convergente; (c) convergente; (d) divergente; (e) convergente; (f) convergente]

11.12 Il criterio della radice non dà alcuna informazione se il risultato del limite (108.19) vale 1. Giustificare tale affermazione considerando la serie armonica generalizzata (107.11).

11.13 Utilizzando il criterio della radice, stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\,k^2+1}{k^2+3k+1}\right)^k$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\log k}{k}\right)^k$

[(a) convergente; (b) convergente, (c) divergente, (d) convergente]

11.14 Stabilire per quali numeri reali $x \geq 0$ risultano convergenti le seguenti serie:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{x^k}{k}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{x^k}{k}\right)$

[(a) $x < 1$; (b) $x \leq 1$; (c) $x < 1$; (d) $x \leq 1$]

11.15 Dimostrare la divergenza della serie armonica (107.1) utilizzando il criterio di convergenza di Cauchy.
[Trattandosi di una serie a termini non negativi, basterà far vedere che la condizione di Cauchy per le serie non è soddisfatta. A tale scopo, basterà osservare che, per ogni $q \in N$:

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q+2}+\ldots+\frac{1}{q+q} \geq q \cdot \frac{1}{2q} = \frac{1}{2},$$

che contraddice la disuguaglianza enunciata nel criterio di Cauchy del paragrafo 104 nel caso $n = p = q$]

11.16 Dimostrare che le conclusioni del criterio della radice sussistano anche se si sostituisce $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ con il limite superiore $\ell = \lim''_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

11.17 Verificare la *proprietà associativa* delle serie, cioè: se $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ è convergente, allora, per ogni successione strettamente crescente k_n di numeri naturali, anche la serie

$$(a_1 + ... + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + ... + a_{k_2}) + ... + (a_{k_{n-1}+1} + ... + a_{k_n}) + ...$$

è convergente ed ha la stessa somma di $a_1 + ... + a_n + ...$.
[Essendo, per ogni $m \in N$,

$$\sum_{i=1}^{m} (a_{k_{i-1}+1} + ... + a_{k_i}) = \sum_{i=1}^{k_m} a_i \ ,$$

(si è posto $k_o = o$) la successione

$$b_m = \sum_{i=1}^{m} (a_{k_{i-1}+1} + ... + a_{k_i})$$

è estratta dalla successione delle ridotte di a_n]

11.18 Scrivere la serie di Taylor, di centro rispettivamente $x_0 = 0$ e $x_0 = 1$, delle seguenti funzioni

(a) $f(x) = x^2 + 1$ (b) $f(x) = (x - 1)^2$

[(a) con centro $x_0 = 0$: $x^2 + 1$. Con centro $x_0 = 1$: $2 - 2(x - 1) + + (x - 1)^2$; (b) con centro $x_0 = 0$: $1 - 2x + x^2$. Con centro $x_0 = 1$: $(x - 1)^2$]

11.19 Scrivere la serie di Taylor, di centro $x_0 = 0$, delle seguenti funzioni (si vedano anche le definizioni delle funzioni iperboliche date nel paragrafo 59):

(a) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (b) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

[(a) $x + x^3/3! + x^5/5! + ... + x^{2n+1}/(2n + 1)! + ...$;
(b) $1 + x^2/2 + x^4/4! + ... + x^{2n}/(2n)! + ...$]

11.20 Sviluppare secondo la formula di Taylor, con centro nel punto 0, le funzioni $f(x)$ che per $x = 0$ assumono il valore $f(0) = 1$, e che per $x \neq 0$ sono definite da:

(a) $f(x) = \dfrac{\log (1 + x)}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$

[(a) $1 - x/2 + x^2/3 - ... + (-1)^n x^n/(n + 1) + ...$;
(b) $1 - x^2/3! + x^4/5! - ... + (-1)^n x^{2n}/(2n + 1)! + ...]$