ANALISI MATEMATICA 1 - Chimici-Elettrici-Meccanici-Navali

Soluzione della prova scritta intermedia del 3 giugno 2010 – Anno Accademico 2009/2010

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t - 1}{|t|\sqrt{t+1}}\,dt$.

(i) [3 pt.] Determinare il dominio di f.

(ii) [4 pt.] Determinare l'insieme dei punti in cui la funzione f risulta derivabile e specificare gli eventuali intervalli in cui la funzione f risulta invertibile.

(iv) [3 pt.] Tracciare il grafico della funzione $F(x) = f(|x|)$.

Soluzione. (i) Sia $g(t) = \dfrac{e^t - 1}{|t|\sqrt{t+1}}$. Si ha: dom $g = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Facilmente si vede che:

$$\lim_{t \to -1^+} g(t) = -\infty$$

di ordine $\frac{1}{2}$

$$\lim_{t \to 0^-} g(t) = -1$$

e

$$\lim_{t \to 0^+} g(t) = 1.$$

Inoltre la funzione g è continua nel suo dominio. Quindi si ha: dom $f = [-1, +\infty)$.

(ii) Tenuto conto di quanto detto precedentemente e applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha:

$$f'(x) = g(x)$$

in $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Applicando poi il teorema del limite della derivata si può affermare che in $x_0 = 0$ la funzione non è derivabile anche se esistono le derivate destre e sinistre. Dal segno della derivata prima si deduce che la funzione risulta invertibile in $(-1, 0]$ e in $[0, +\infty)$, ma non in tutto il suo dominio.

(iii) Il grafico della funzione F si deduce facilmente dalle seguenti osservazioni:

$$F(-x) = F(x)$$

quindi dom $F = \mathbb{R}$

$$\text{dom } F' = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

e

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$$

quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty.$$

Esercizio 2. Sia

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|\sin x|^{2\alpha}}{\sqrt{x^2 + y^2 + xy}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) [4 pt.] Determinare per quali valori di $\alpha > 0$, se ve ne sono, g è continua in $(0,0)$.

(ii) [3 pt.] Determinare per quali valori di $\alpha > 0$, se ve ne sono, esistono le derivate parziali di g in $(0,0)$.

(iii) [3 pt.] Determinare per quali valori di $\alpha > 0$, se ve ne sono, g è differenziabile in $(0, 0)$

Soluzione. (i) Osserviamo che sull'asse y la funzione vale zero per ogni $\alpha > 0$. Quindi se per qualche $\alpha > 0$ il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ esiste, esso vale necessariamente zero e la funzione è allora continua in $(0, 0)$. Ora,

$$\frac{|\sin x|^{2\alpha}}{\sqrt{x^2 + y^2 + xy}} = \frac{|\sin x|^{2\alpha}}{|x|^{2\alpha}} \frac{|x|^{2\alpha}}{\sqrt{x^2 + y^2 + xy}}$$

e poiché per ogni $\alpha > 0$ si ha $|\sin x/x|^{2\alpha} \to 0$, basta studiare il secondo fattore, che è non negativo. In coordinate polari, esso è:

$$\rho^{2\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin\theta\cos\theta}} = \rho^{2\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta}} \stackrel{\text{def}}{=} \rho^{2\alpha-1} h(\theta).$$

Siccome $-1 \le \sin 2\theta \le 1$, si ha che $\sqrt{1/2} \le \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta} \le \sqrt{3/2}$ e quindi risulta $\sqrt{2/3} \le h(\theta) \le \sqrt{2}$. Pertanto,

$$|g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^{2\alpha-1} h(\theta) \le \sqrt{2}\, \rho^{2\alpha-1}$$

e quindi se $2\alpha - 1 > 0$, ossia $\alpha > 1/2$, si ha $g(x, y) \to 0$, cosicché g è continua in $(0, 0)$. Se $\alpha = 1/2$, i calcoli precedenti mostrano che

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]} g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} h(\theta) = \sqrt{2}$$

e quindi il limite di $g(x, y)$ per $(x, y) \to (0, 0)$ non esiste. Infine, per $0 < \alpha < 1/2$ si ha

$$g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^{2\alpha-1} h(\theta) \ge \sqrt{2/3}\, \rho^{2\alpha-1}$$

e quest'ultimo diverge positivamente. Quindi, per $0 < \alpha < 1/2$, $g(x, y)$ diverge positivamente per $(x, y) \to (0, 0)$. Si conclude che g è continua nell'origine se e solo se $\alpha > 1/2$.

(ii) Abbiamo già osservato che che sull'asse y la funzione vale zero per ogni $\alpha > 0$. Quindi $g_y(0, 0) = 0$ per ogni $\alpha > 0$. Inoltre,

$$\frac{g(x, 0) - g(0, 0)}{x} = \frac{|\sin x|^{2\alpha}}{|x|\, x} = \left|\frac{\sin x}{x}\right|^{2\alpha} \frac{|x|^{2\alpha-1}}{x}.$$

Ovviamente, per $\alpha > 1$ si ha $g_x(0, 0) = 0$. Siccome poi

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|^{2\alpha-1}}{x} = \begin{cases} \pm 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ \pm\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

la derivata parziale g_x nell'origine non esiste se $\alpha \le 1$.

(iii) Affinché g sia differenziabile nell'origine, è necessario che essa sia ivi continua e che ammetta derivate parziali in tal punto. Quindi deve aversi $\alpha > 1/2$. Poiché in tal caso $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$, in coordinate polari si ha

$$\frac{g(x, y) - g(0, 0) - \nabla g(0, 0) \cdot (x, y)}{\|(x, y)\|} = \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \rho^{2\alpha-2} h(\theta).$$

Considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte al punto (i) mostrano che g è differenziabile nell'origine se e solo se l'esponente di ρ è positivo, cioè se e solo se $\alpha > 1$.

Esercizio 3. Si consideri l'equazione differenziale $(k-1)y'' + 12y' + 9y = xe^{-x}$.

(i) [5 pt.] Per $k = 5$ trovarne l'integrale generale e tutte le soluzioni che soddisfano la condizione $y(0) = 1$.

(ii) [5 pt.] Per $k = 1$ trovarne l'integrale generale e risolvere il il problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = 2$.

Soluzione. (i) Per $k = 5$ l'equazione diventa $4y'' + 12y' + 9y = xe^{-x}$. Si tratta di una equazione lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti. Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. Il polinomio caratteristico $4\lambda^2 + 12\lambda + 9$ ha la sola radice $\lambda_0 = -3/2$ con molteplicità due. Quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è

$$y_0(x) = c_1 e^{-3x/2} + c_2 x e^{-3x/2}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare $y_*(x)$ della forma $y_*(x) = (Ax + B)e^{-x}$. Siccome

$$\begin{aligned} y_*'(x) &= [-Ax + (A - B)]\, e^{-x} \\ y_*''(x) &= [Ax + (B - 2A)]\, e^{-x}, \end{aligned}$$

sostituendo nell'equazione si ha

$$\begin{aligned} 4y_*'' + 12y_*' + 9y_* &= \{4\,[Ax + (B - 2A)] + 12\,[-Ax + (A - B)] + 9\,[Ax + B]\}\, e^{-x} \\ &= [Ax + (B + 4A)]\, e^{-x}. \end{aligned}$$

Quindi

$$4y_*'' + 12y_*' + 9y_* = xe^{-x} \iff A = 1,\ B + 4A = 0 \iff A = 1,\ B = -4.$$

Pertanto l'integrale generale richiesto è

$$y(x) = c_1 e^{-3x/2} + c_2 x e^{-3x/2} + (x - 4)e^{-x}.$$

Siccome $y(0) = c_1 - 4$, si ha $y(x) = 1$ per $c_1 = 5$ e quindi le soluzioni per le quali $y(0) = 1$ sono tutte e sole le funzioni

$$y(x) = (5 + cx)e^{-3x/2} + (x - 4)e^{-x}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Per $k = 1$ l'equazione diviene $12y' + 9y = xe^{-x}$, ovvero $y' = -\frac{3}{4}y + \frac{1}{12}xe^{-x}$, che è un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti continui. Posto $a(x) = -3/4$ e $b(x) = xe^{-x}/12$, l'integrale generale è

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int a(x)\,dx}\Big[c + \int e^{-\int a(x)\,dx}\, b(x)\,dx\Big] \\ &= e^{-3x/4}\Big[c + \frac{1}{12}\int e^{3x/4} x e^{-x}\,dx\Big] \\ &= e^{-3x/4}\Big[c + \frac{1}{12}\int e^{-x/4} x\,dx\Big] \\ \text{(parti)}\quad &= e^{-3x/4}\Big[c + \frac{1}{12}\Big\{-4e^{-x/4}x + 4\int e^{-x/4}\,dx\Big\}\Big] \\ &= e^{-3x/4}\Big[c - \frac{1}{3}xe^{-x/4} - \frac{4}{3}e^{-x/4}\Big]. \end{aligned}$$

Poiché infine $y(0) = c - 4/3$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{3}{4}y + \frac{1}{12}xe^{-x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

ha come unica soluzione

$$y(x) = \frac{1}{3} e^{-3x/4} \Big[10 - x e^{-x/4} - 4 e^{-x/4} \Big].$$