Nome: **Cognome:**

Esame di Geometria. Febbraio 2016 civili (A)

Scrivere le risposte nelle apposite parentesi. Giustificare in modo chiaro e sintetico ogni risposta. Non verranno valutate le risposte prive di giustificazione.

1) Determinare un polinomio $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ avente $z = i - 2$ come radice e tale che $P(i) = 1 + i$. [$P(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{5}{4}$]

2) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la conica $x^2 + 2hxy + 6y^2 - 2x + 1 = 0$ e' una parabola? e per quali e' una coppia di rette distinte?.

[parabola: $h = \pm\sqrt{6}$; rette distinte: $h = 0$]

3) Trovare la distanza del punto (1,1,1) dalla retta passante per i punti (1,0.0) e (2,1,-1).
[$\sqrt{2}$]

4) Determinare una base per il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:
$W = \{(x, y, z, t) \mid x + y - 2z = y - 3z = 0\}$.
[$((-1, 3, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$]

5) Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{pmatrix} h^2-2 & h+4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}$$

[per $h = 2$, ∞^1 soluzioni ; per $h = -\frac{7}{4}$ nessuna soluzione; per $h \neq 2$ e $h \neq -\frac{7}{4}$ una soluzione]

6) Sia A la matrice dei coefficienti del sistema dell'esercizio 5). Per $h = 2$, A e' diagonalizzabile? Se lo e', determinare una matrice diagonale simile ad A.

[Si; $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$]

7) Definire una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $Imf = \{x + y + z = 0\}$.
[$f(x, y, z) = (x + y,\ -x,\ -y)$]

8) Definire una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che abbia 1 come autovalore.
[$f(x, y, z) = (x,\ y,\ z)$]

9) Scrivere un vettore geometrico $w \in \mathbb{R}^3$ parallelo alla retta $\{x + 2z = y + 1 = 0\}$.
[$(-2,\ 0,\ 1)$]

10) Sia $f : V \longrightarrow W$ una trasformazione lineare fra due spazi vettoriali. Provare che se f e' iniettiva, allora $\mathrm{Ker}f = 0_V$.
[Sia $v \in \mathrm{Ker}f$. e quindi $f(v) = 0_W$. Dato che $f(0_V) = 0_W$, abbiamo che $f(v) = f(0_V)$. Essendo f iniettiva ne segue che $v = 0_V$.]