Nome: **Cognome:**

Esame di Geometria. Febbraio 2016 (a)

Scrivere le risposte nelle apposite parentesi. Giustificare in modo chiaro e sintetico ogni risposta. Non verranno valutate le risposte prive di giustificazione.

1) Determinare un polinomio $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ avente $z = 1 + i^{231}$ come radice e tale che $P(1) = 2$. [$P(x) = 2x^2 - 4x + 4$]

2) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la conica $x^2 + 2hxy + 2y^2 + 2hy = 0$ e' una ellisse? e per quali e' una coppia di rette distinte?.

[ellisse: $-\sqrt{2} < h < 0$ oppure $0 < h < \sqrt{2}$; rette distinte: $h = 0$]

3) Trovare la distanza del piano $x+y = 0$ dalla retta passante per i punti (1,1.0) e (2,0,-1).

[$\sqrt{2}$]

4) Determinare una base per il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$W = \{(x, y, z) \mid x + y - z = y - 4z = 0\}$.

[$(-3, 4, 1)$]

5) Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} h^2-1 & h+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}$$

[$h = -1$ nessuna soluzione; $h = 2, \infty^1$ soluzioni; $h \neq -1$ e $h \neq 2$ una soluzine]

6) Sia A la matrice dei coefficienti del sistema dell'esercizio 5). Per $h = -1$, A e' diagonalizzabile? Se lo e', determinare una matrice diagonale simile ad A.

[Si; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$]

7) Definire una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $Kerf = \{x - y + z = 0\}$.

[$f(x, y, z) = (x - y + z,\ 0,\ 0)$]

8) Definire una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che abbia 2 come autovalore.

[$f(x, y, z) = (2x,\ 2y,\ 2z)$]

9) Scrivere un vettore geometrico $w \in \mathbb{R}^3$ parallelo al piano $\{x - y + 2 = 0\}$.

[$(1,\ 1,\ 0)$]

10) Siano $v_1, ..., v_n$ vettori di uno spazio vettoriale V su un capo k. Completare la seguente frase:

[$v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se....

$v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se, qualsiasi siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$, il vettore $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ e' uguale al vettore nullo solo se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono tutti nulli]