. **Esercizio 1.** Sia $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ con

$$g(t) = \begin{cases} 1/t^2 & \text{se } t \geq 1; \\ \dfrac{1}{(t+1)\sqrt{\log(1+t)}} & \text{se } 0 < t < 1; \\ \dfrac{1}{(t+2)\sqrt{|t|}} & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

a) Determinare l'insieme di definizione di g e l'insieme di definizione di f;

b) calcolare $f'(x)$ dove esiste, e studiarne il segno;

c) se esiste, calcolare esplicitamente $f(x)$ per $x \in (0,1)$ e per $x \geq 1$.

Esercizio 2. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Determinare l'insieme di definizione I di f e disegnarlo;

b) studiare la continuità di f;

c) studiare la differenziabilità di f in $(0,0)$;

d) nei punti $(x,y) \neq (0,0)$, $(x,y) \in I$ calcolare, dove esistono, le derivate $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ e studiare la differenziabilità di f in tali punti.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x\cos x(e^{2y(x)}+1)/e^{y(x)}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a) stabilire se esso ammette una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

b) determinare, se esiste, la soluzione del problema, precisando un intorno del punto iniziale in cui essa sia certamente definita.