

Esercizio 1. Sia $f(x) = \int_1^x g(t) dt$ con

$$g(t) := \begin{cases} \frac{t - \sin t}{t^2 \log(1+t)} & \text{se } t < 1, \\ \log t/t & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

- Determinare l'insieme di definizione di g e l'insieme di definizione di f .
- Calcolare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Dove esiste, calcolare $f'(x)$.
- Studiare il segno di f' e disegnare il grafico di f .

Esercizio 2. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x| \sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Studiare la continuità di f .
- Calcolare, se esistono, le derivate parziali di f in $(0, 0)$.
- Calcolare, se esistono, $(\partial f / \partial x)(x, y)$, $(\partial f / \partial y)(x, y)$ nei punti $(x, y) \neq (0, 0)$.
- Studiare la differenziabilità di f in $(0, 0)$.

Esercizio 3. Data la famiglia di equazioni differenziali ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$y''(x) + 2y'(x) + 2\alpha y(x) = e^{-x}$$

- determinare gli eventuali valori del parametro α per i quali tutte le soluzioni dell'equazione sono limitate in $[0, +\infty)$.
- Sia ora $\alpha = 1$; calcolare l'integrale generale dell'equazione.