Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y\log(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ k & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Determinare, se esistono, i valori del parametro reale k in modo che f risulti continua in $(0,0)$;

b) determinare, se esistono, i valori del parametro reale k in modo che f risulti differenziabile in $(0,0)$;

c) calcolare, se esiste, il gradiente di f in $P_1 = (1,2)$.

Esercizio 2. Sia $f(x) := \int_2^x g(t)\,dt$ essendo

$$g(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{e^t - 1}} & \text{se } 0 < t \leq 1, \\ \log(t-1) & \text{se } t > 1, \\ \arctan(1/t) & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

a) Determinare l'insieme di definizione di g (facoltativo: disegnare il grafico di g);

b) determinare l'insieme di definizione di f e i limiti agli estremi dell'insieme di definizione;

c) dove esiste, calcolare $f'(x)$;

d) disegnare il grafico di f.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{\sin 2x} + |\tan x|^{3/2}, \\ y(\pi/4) = \alpha \end{cases}$$

a) al variare del parametro reale α, determinare il più grande intervallo, contenente il punto iniziale, dove è definita la soluzione;

b) determinare, se esiste, la soluzione del problema nel caso $\alpha = 1$.