

Esercizio 1 Sia

$$f(x) := \int_{-1}^x g(t) dt \quad \text{con} \quad g(t) := \begin{cases} \sqrt[3]{\arctan t} & \text{se } t \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

- 1) Disegnare il grafico di g , specificandone l'insieme di definizione;
- 2) determinare l'insieme di definizione di f e studiare i limiti di f agli estremi di esso;
- 3) dove esiste, calcolare $f'(x)$ e studiare la monotonia di f ;
- 4) disegnare il grafico di f .

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x, y) := \frac{1 - \cos x + \arctan(y^2)}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$$

- a) stabilire se essa è prolungabile per continuità in $(0, 0)$;
- b) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata ammette derivate parziali in $(0, 0)$; in caso affermativo, studiare la differenziabilità della funzione prolungata in $(0, 0)$;
- c) stabilire se esiste ed in caso affermativo calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$.

Esercizio 3 Data l'equazione differenziale

$$y'''(x) - \frac{1}{8}y(x) = e^{-2x}$$

- a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata e, se formano uno spazio vettoriale, determinarne la dimensione.
- b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data.
- c) Se esistono, determinare tutte le soluzioni limitate in $[0, +\infty)$ dell'equazione data.