Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos x)y(x) + \sin 2x \\ y(k) = 0 \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) il problema ammette una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
b) calcolare la soluzione (se esiste) nel caso $k = \pi/2$, determinando anche il più grande intervallo in cui essa è definita.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \int_{-1}^{x} g(t)dt$ con

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{t}}{e^t - 1} & \text{se } \ t < 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{t(t-1)}} & \text{se } \ 0 < t < 1, \\ \dfrac{1}{e^t - e} & \text{se } \ t > 1. \end{cases}$$

a) Determinare l'insieme di definizione di f.
b) Dove esiste, calcolare $f'(x)$ e studiare la monotonia di f.
c) Se esiste, calcolare $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Esercizio 3. Sia $f(x, y) = \sqrt[3]{xy} + e^{xy} - 1$.

a) Studiare la continuità di f nel suo insieme di definizione.
b) Verificare se f è differenziabile nel punto $(0, 0)$.
c) Se esiste, trovare il gradiente di f nel punto $P_0 = (-1, 1)$.
d) Verificare se esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(P_0, f(P_0))$ e, in caso affermativo, scriverne l'equazione.