

Esercizio 1 Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_1^x \frac{\sqrt[3]{\log |t-1|}}{(|t| + \sin t) \sqrt[5]{(e^t - e^2)^6}} dt$$

- a) applicando la teoria degli integrali impropri, determinarne l'insieme di definizione;
- b) determinarne l'insieme di derivabilità;
- c) studiarne i limiti agli estremi dell'insieme di definizione.

Esercizio 2 . Data la funzione

$$f(x, y) := \frac{1 - \cos xy - xy \sin xy}{x^2 + y^2}$$

- a) stabilire se f è prolungabile per continuità in $(0, 0)$;
- b) in caso affermativo, studiare la differenziabilità della funzione prolungata in $(0, 0)$;
- c) stabilire se esiste ed in caso affermativo calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 1)$.

Esercizio 3 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2xe^{-\sin y(x)} / \cos y(x), \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

- a) Verificare se il problema dato ha un'unica soluzione al variare del parametro reale α .
- b) Sia $\alpha = 0$; determinare, se esiste, la soluzione del problema, specificandone l'insieme di definizione.