

Esercizio 1. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_{-1}^x \frac{\sqrt[3]{\log |t|}}{[\arctan(t-1)]\sqrt{e^{|t|}-1}} dt$$

- tenendo presente la teoria degli integrali impropri, determinarne l'insieme di definizione;
- determinarne l'insieme di derivabilità; dove esiste, calcolare $f'(x)$ e studiare la monotonia di f ;
- studiarne i limiti di f agli estremi dell'insieme di definizione.

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x, y) := \sqrt{1 - \cos^3 y} + \frac{(\arctan x) \log(1 + xy)}{x^2 + y^2}$$

- determinarne l'insieme di definizione;
- stabilire se la funzione è prolungabile per continuità in $(0, 0)$;
- in caso affermativo, stabilire se esistono le derivate parziali della funzione così prolungata in $(0, 0)$;
- in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile in $(0, 0)$.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 \sqrt{1 - y^2(x)}, \\ y(1) = k \end{cases}$$

- Al variare di $k \in \mathbb{R}$, trovare le eventuali soluzioni costanti del problema.
- Discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni per $k = 0$.
- Determinare la soluzione (o le soluzioni) del problema per $k = 0$, specificandone l'insieme di definizione.