

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x, y) := \frac{\sqrt[3]{y - \arctan y} \sqrt{|\cos x - 1|}}{\sqrt{5x^2 + y^2}}$$

- determinarne l'insieme di definizione;
- stabilire se la funzione è prolungabile per continuità in $(0, 0)$;
- in caso affermativo, stabilire se tale funzione, così prolungata, è differenziabile in $(0, 0)$.

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x) := \int_3^x \frac{\log(1+t)}{\sqrt[5]{1-t} \arctan(1-e^t)} dt$$

- determinare l'insieme di definizione di f ;
- in ogni punto in cui esiste, calcolare $f'(x)$;
- studiare la monotonia di f e calcolare i limiti agli estremi dell'insieme di definizione;
- disegnare il grafico di f .

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (|x| - x)y(x) + x \sin(x^2) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

- stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione;
- determinare l'insieme di definizione delle soluzioni;
- determinare, se possibile, la soluzione (o le soluzioni) nel caso $\alpha = 0$.