1

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\log(1+yx^2)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ k & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) disegnare l'insieme di definizione di f;

b) determinare i valori di k (se ne esistono) per i quali la funzione è continua in $(0,0)$;

c) determinare i valori di k (se ne esistono) per i quali la funzione è differenziabile in $(0,0)$;

d) se esiste, calcolare $\partial f/\partial y(1,1)$.

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x) := \int_2^x \frac{e^{\arctan t} - 1}{\sqrt{t}\log\sqrt{t}}\, dt$$

a) determinarne l'insieme di definizione;

b) dove esiste, calcolare $f'(x)$;

c) studiare la monotonia di f;

d) calcolare, se esiste, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1+y^4(x)}{x(1+x^2)y^3(x)} \\ y(\alpha) = -1 \end{cases}$$

a) stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale.

b) Sia ora $\alpha = 1$; determinare, se possibile, la soluzione (o le soluzioni).