**Esercizio 1.** Sia

$$f(x,y) := \frac{\sqrt{1-\cos xy}}{(x^2+y^2)^\alpha} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Determinare, al variare del parametro reale $\alpha$, l'insieme di definizione di $f$ e calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Sia, d'ora in poi, $\alpha = 1/2$.

b) Verificare se $f$ è prolungabile per continuità in $(0,0)$ e, nel caso sia prolungabile, verificare se è anche differenziabile nello stesso punto.

c) Calcolare, se esiste, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$

**Esercizio 2.** Sia

$$g(t) := \begin{cases} 1/(t+2) & \text{se } t < 0 \\ \sin t & \text{se } 0 < t < (3/2)\pi \\ t - 2\pi & \text{se } t > (3/2)\pi \end{cases}$$

e sia $f(x) := \int_\pi^x g(t)\,dt$.

a) Determinare l'insieme di definizione di $f$ e i limiti agli estremi.

b) Dove esiste, calcolare $f'(x)$.

c) Studiare monotonia e convessità di $f$ e disegnarne il grafico.

d) Calcolare esplicitamente $f$.

**Esercizio 3.** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)/(x-1) + (1-x)e^x \cos x \\ y(\beta) = 0 \end{cases}$$

a) Individuare il tipo dell'equazione data.

b) Stabilire per quali $\beta \in \mathbb{R}$ (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale.

c) Sia ora $\beta = 0$; determinare, se possibile, la soluzione, indicando anche il più grande intervallo in cui essa è definita.