

Esercizio 1. Sia $f(x) := \int_{-1}^x g(t) dt$ con

$$g(t) := \begin{cases} t \log t & \text{se } t > 0, \\ \frac{1}{\sqrt[5]{t - \arctan t}} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

- 1) Determinare l'insieme di definizione di g e disegnare il grafico di g .
- 2) Determinare l'insieme di definizione di f e calcolarne i limiti agli estremi del suo insieme di definizione.
- 3) Studiare l'insieme di derivabilità e la monotonia di f .
- 4) Studiare la convessità di f e disegnare il grafico di f .

Esercizio 2. Sia

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{y \arctan x + x(e^y - 1)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } y > 0, \\ 0 & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

- 1) Studiare la continuità di f nel punto $(1, 0)$.
- 2) Studiare la continuità e la differenziabilità di f nel punto $(0, 0)$.
- 3) Calcolare, se esiste, il gradiente di f nel punto $(0, 1)$.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{4y(x)}{\sin 2x} + \frac{x^2 \sin^2 x}{\cos x} \\ y(\pi/4) = \alpha \end{cases}$$

- a) stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
- b) determinare, se possibile, la soluzione nel caso $\alpha = 0$, indicando anche il più grande intervallo, contenente il punto iniziale, in cui essa è definita.