Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)/(1+x^2) + |x|e^{x^2+\arctan x} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) per ogni valore reale del parametro α, studiare esistenza ed unicità della soluzione, determinandone anche l'insieme di definizione;
b) nel caso $\alpha = 0$ calcolare esplicitamente la soluzione (o le soluzioni).

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^2} & \text{se } x > 0, \\ \ln(1+\sqrt{x^2+y^2}) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Verificare se la funzione f risulta continua in (0,0).
b) Verificare se la funzione f risulta differenziabile in (0,0).
c) Se esiste, calcolare $f_x(2,1)$.

Esercizio 3. Sia $f(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} g(t)\, dt$
con

$$g(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{e^{-t}-1} & \text{se } t < 0, \\ 1/\sqrt[3]{\log t} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico di g, specificandone l'insieme di definizione.
b) Determinare l'insieme di definizione di f e i limiti agli estremi dell'insieme di definizione.
c) Dove esiste, calcolare $f'(x)$ e studiare la monotonia di f.
d) Disegnare il grafico di f.