Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{4 - y^2(x)}\,\arctan(x+1), \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) discutere, al variare del parametro reale α, esistenza ed unicità della soluzione in un intorno del punto iniziale.
b) Determinare, se esiste, almeno una soluzione nei casi $\alpha = -2,\ \alpha = 0$.

Esercizio 2. Sia $f(x) := \int_1^x g(t)\,dt$ con

$$g(t) := \begin{cases} \arctan(\log t) & \text{se } t > 0, \\ \\ \dfrac{\arctan t}{\log(1 + \sqrt[3]{t})} & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

a) Determinare gli insiemi di definizione di g e di f.
b) Calcolare, dove esiste, $f'(x)$ e studiarne il segno.
c) Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
d) Disegnare il grafico di f.

Esercizio 3. Sia

$$f(x,y) := \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

a) Calcolare, se esistono, le derivate parziali di f nei punti $(x,y) \neq (1,2)$;
b) calcolare, se esistono, le derivate parziali di f nel punto $(1,2)$;
c) disegnare le curve di livello C_K di f per $K = 0,1,2$ e determinare, se esistono, massimo e minimo assoluti di f nell'insieme $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (\mathrm{x}-1)^2 + (\mathrm{y}-2)^2 \leq 4\}$.