Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = [y^2(x) - 3y(x) + 2](1 + 3x^2) \arctan x \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;

b) stabilire per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

c) determinare la soluzione o le soluzioni del problema (se esistono) nei casi $k = 0$ e $k = 2$.

Esercizio 2. Sia $F(x) = \int_2^x g(t)dt$ con

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(t+1)\sqrt{4-t}} & \text{se } t < 4 \\ \dfrac{\ln(t-4)}{1-e^t} & \text{se } t > 4 \end{cases}$$

a) Determinare l'insieme di definizione I di F e studiare i limiti di F agli estremi di I.

b) Dove esiste, calcolare $F'(x)$ e studiare la monotonia di F.

c) Determinare il numero di zeri di F nell'insieme $(-\infty, 4) \cap I$.

d) Specificare se F risulta primitiva di g in I, giustificando la risposta.

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2y^2} - \cos xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ k & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Determinare il parametro reale k in modo che la funzione sia continua in $(0,0)$;

b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, calcolare, se esistono, le derivate parziali della funzione in $(0,0)$;

c) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, verificare se la funzione è differenziabile in $(0,0)$;

d) calcolare, se esiste, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -1)$.