

**Esercizio 1.** Data la funzione

$$f(x, y) = \arctan \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$$

- a) studiare la continuità di  $f$  nel suo insieme di definizione,
- b) studiare la differenziabilità di  $f$  nel punto  $(0, 0)$ ,
- c) determinare il gradiente di  $f$  nel punto  $P_0 = (1, 0)$  e, se esiste, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di  $f$  in  $(P_0, f(P_0))$ .

**Esercizio 2.** Data la funzione integrale

$$f(x) = \int_{-1}^x \frac{\arctan \sqrt[3]{t}}{\log(1-t)} dt$$

- a) determinare l'insieme di definizione di  $f$ ;
- b) determinare l'insieme di derivabilità di  $f$  e, dove esiste, trovarne la derivata;
- c) studiare i limiti di  $f$  agli estremi del suo insieme di definizione.

**Esercizio 3.** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = [e^x/(1 - e^x)]y(x) + x, \\ y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

- a) riconoscere il tipo dell'equazione differenziale;
- b) stabilire per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
- c) sia ora  $\alpha = 1$ ; determinare, se esiste, la soluzione del problema, specificando il più grande intervallo in cui essa è definita.