Esercizio 1. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x^2} - 1 + \sin y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & \text{se } (x.y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x.y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Verificare se f è continua nel suo insieme di definizione I.

b) Verificare se f è differenziabile in (0,0).

c) Se esiste, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (-1,0)$.

Esercizio 2. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_0^x \frac{\sqrt[5]{e^t - 1}\, \log|t|}{(t^2 - 3t + 2)\sqrt{|t| - \log(1+|t|)}}\, dt$$

a) determinarne l'insieme di definizione;

b) determinarne l'insieme di derivabilità;

c) studiarne i limiti agli estremi dell'insieme di definizione.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x[y^2(x) + 4y(x) + 5]}{x^2 + x - 2} \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire per quali valori reali di k (se ce ne sono) esiste ed è unica la soluzione del problema;

b) sia ora $k = 0$; calcolare (se esiste) la soluzione, determinando altresì un intervallo in cui è certamente definita.