Esercizio 1. Sia

$$f(x) := \int_{-1}^{x} g(t)\,dt \quad \text{con} \qquad g(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{e^t - 1 + t}} & \text{se } t \leq 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{e^t - e}} & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

1) Disegnare il grafico di g, specificandone l'insieme di definizione;

2) determinare l'insieme di definizione di f e studiare i limiti di f agli estremi di esso;

3) dove esiste, calcolare $f'(x)$ e studiare la monotonia di f;

4) disegnare il grafico di f.

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy} - \cos(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+3y^2}} & \text{se } x < 0, \\ k & \text{se } x = 0, \\ \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{2x^2+y^2}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Determinare, se ne esistono, i valori del parametro reale k in modo che f risulti continua in (0,0).

b) Determinare, se ne esistono, i valori del parametro reale k in modo che f risulti differenziabile in (0,0).

c) Se esiste, calcolare $f_y(-1,1)$.

Esercizio 3. Data l'equazione differenziale

$$y'''(x) - 2y''(x) + 4y'(x) = \sin 2x + 4\cos 2x$$

a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata e, se formano uno spazio vettoriale, determinarne la dimensione.

b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea infinitesime per $x \to -\infty$.

c) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data e, se formano uno spazio vettoriale, determinarne la dimensione.