

Esercizio 1. Sia $f(x, y) := x^2 + y^2 - 2y$.

- Determinare, se esiste, il gradiente di f nel punto $P_o = (2, 2)$;
- disegnare la curva di livello di f passante per il punto P_o ;
- calcolare, se esiste, $(\partial f / \partial Q)(P_o)$ essendo $Q := (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$;
- determinare, se esistono, massimo e minimo assoluti di f nell'insieme

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 2\}$$

e) calcolare $\int \int_D f(x, y) dx dy$

Esercizio 2. Sia $f(x) := \int_2^x g(t) dt$ con

$$g(t) := \begin{cases} \log |t| & \text{se } t < 1, \\ 1/(t - 3) & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

- Determinare l'insieme di definizione di g e disegnare il grafico di g ;
- determinare l'insieme di definizione di f e i limiti agli estremi dell'insieme di definizione;
- determinare, dove esiste, $f'(x)$ e studiare la monotonia di f ;
- disegnare il grafico di f .

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = [y^2(x) + 4y(x) + 4](9 + x^2) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

- stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
- determinare, se possibile, la soluzione (o le soluzioni) nei casi $\alpha = -2$ e $\alpha = 0$.