

**Esercizio 1.** Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2(\tan x)y(x) + (\sin x)^2 \\ y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

- Riconoscere di che tipo è l'equazione;
- stabilire per quali valori del parametro reale  $\alpha$  (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
- sia ora  $\alpha = (3/4)\pi$ ; determinare il più grande intervallo, contenente il punto iniziale, nel quale esiste ed è unica la soluzione;
- calcolare la soluzione di cui al punto c).

**Esercizio 2.** Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + 2y^4 + x - ky + 1$$

- Per quali valori del parametro reale  $k$  la funzione ha in  $(-1/\sqrt[3]{4}, 0)$  un punto critico?
- Per tali valori si stabilisca se il punto  $(-1/\sqrt[3]{4}, 0)$  è un punto di minimo locale o massimo locale o sella.
- Sia  $k = 1$ . Stabilire se la funzione è limitata.
- Sia  $k = 0$ . Determinare, se esistono, gli estremi globali di  $f$  in  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2x^2y^2 + 2y^4 = 1\}$ .

**Esercizio 3.** Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{x - e^x - k}$$

- Per quali valori del parametro reale  $k$  la funzione è definita in tutto  $\mathbb{R}$ ?
- Sia  $k = 1$ . Tracciare, motivandolo, il grafico della funzione.
- Sia  $k = 1$ . Trovare, se esiste, un intorno di  $x_0 = 1/2$  in cui la funzione  $g(x) = |f(x)|$  risulti invertibile.
- Sia  $k = 1$ . Calcolare, se esiste,  $(g^{-1})'(1/(1 + 2\sqrt{e}))$ .