

Esercizio 1. Sia $f(x) = ||\log(x + e^x) - 1| - 1|$.

- (a) Determinare il dominio I di f e calcolare i limiti di f agli estremi di I .
- (b) Studiare la monotonia di f .
- (c) Determinare, se esistono, gli estremi relativi e/o assoluti f .
- (d) Provare che f è derivabile in un intorno di $x_0 = 2$ e scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(2, f(2))$.

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{y(x)-2} \log(x + \sqrt{1+x^2}) \\ y(\alpha) = \beta. \end{cases}$$

- (a) Stabilire di che tipo è l'equazione.
- (b) Determinare, se esistono, i valori dei parametri reali α e β per i quali esiste ed è unica la soluzione del problema in un intorno del punto iniziale.
- (c) Sia ora $\alpha = \beta = 0$; calcolare, se esiste, la soluzione (o le soluzioni).

Esercizio 3. Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|y+|y|x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) Studiare la continuità della funzione.
- (b) La funzione è differenziabile in $(0, 0)$?
- (c) Tracciare la curva di livello 0 della funzione.
- (d) Calcolare, se esiste, la derivata direzionale massima della funzione in $(0, 0)$.