

Esercizio 1. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{\tan(1/n) - \arctan(1/n)} (x+1)^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

- Determinare l'ordine di infinitesimo della successione: $\tan(1/n) - \arctan(1/n)$.
- Stabilire per quali valori del parametro reale x (se ce ne sono) la serie converge.
- Stabilire per quali valori del parametro reale x (se ce ne sono) la serie converge assolutamente.

Esercizio 2. Si consideri il problema:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y^2(x) - y(x)}{\sqrt{1-x}} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- Studiare l'esistenza e unicità della soluzione al variare di x_0 e $y_0 \in \mathbb{R}$.
- Determinare esplicitamente la soluzione nel caso $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$, precisandone il dominio.
- Determinare esplicitamente la soluzione nel caso $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$, precisandone il dominio.

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f(x) = \log(x - \frac{1}{x}) - x^2$.

- Determinare il dominio I di f .
- Calcolare i limiti di f agli estremi di I .
- Studiare la monotonia di f .
- Determinare il numero di zeri di f .
- Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(-1/2, f(-1/2))$, se esiste.