

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x^\alpha) \sin\left(\frac{1}{e^x-1}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

dove α è un parametro positivo.

- (a) [2 p.ti] Determinare i valori di α , se ve ne sono, per i quali f è continua in $x_0 = 0$.
- (b) [4 p.ti] Determinare i valori di α , se ve ne sono, per i quali f è derivabile in $x_0 = 0$.
- (c) [4 p.ti] Determinare i valori di α , se ve ne sono, per i quali f' è continua in $x_0 = 0$.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (-3/x)y(x) + e^{x^2} \\ y(-1) = -1 \end{cases}$$

- (a) [2 p.ti] Stabilire di che tipo è l'equazione.
- (b) [3 p.ti] Determinare il più grande intervallo, contenente il punto iniziale, in cui esiste ed è unica la soluzione del problema.
- (c) [5 p.ti] Calcolare la soluzione (o le soluzioni).

Esercizio 3. Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - 4x^2 - y^2} - x + y$$

- (a) [2 p.ti] Disegnare il dominio D di f .
- (b) [2 p.ti] Stabilire se la funzione è limitata.
- (c) [2 p.ti] Calcolare, **usando la definizione**, la derivata direzionale di f in $(0, 0)$ rispetto il vettore $\vec{u} = (1/2, \sqrt{3}/2)$.
- (d) [4 p.ti] Determinare, se esistono, i punti di minimo e massimo globali di f in $A = \{(x, y) \in D : x \geq 0, y \geq 0\}$.